Td 5 de Systèmes dynamiques

Université de Picardie Jules Verne, 2021

TD 5 (Systèmes dynamiques)

Ex. 1 :

(1) $\Rightarrow$ (3) : supposons $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ergodique.

Soit $f, g \in L^2(X, \mu)$. On veut m.q.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X f \circ T^k \cdot g \, d\mu = \int_X f \, d\mu \times \int_X g \, d\mu$$

Rappel : on note $E_{inv} = \{ h \in L^2 \mid h \circ T = h \} = \{$fonctions constantes$\}$ ici (car T ergodique)

$$E_{inv}^{\perp} = \{ h \in L^2 \mid \langle h, \mathbb{1}_X \rangle = 0 \} = \{ h \mid \int h \, d\mu = 0 \}.$$

Le thm de Von Neumann dit que $S_n f \xrightarrow[n \to +\infty]{L^2} p_{inv}(f)$

$\hookrightarrow$ proj. sur E_{inv}

mais $\displaystyle\int_X S_n f \, d\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X f \circ T^k \, d\mu$

$= \int_X f \, d\mu$ car $T_* \mu = \mu$

donc $\displaystyle\int_X S_n f \, d\mu = \int_X f \, d\mu$, $\forall n \geq 0$

et alors, comme $S_n f \xrightarrow{L^2} p_{inv}(f)$ d'où $p_{inv}(f) = \displaystyle\int_X f \, d\mu$ p.p.

d'où $S_n f \xrightarrow{L^2} \displaystyle\int_X f \, d\mu$

Ceci équivaut à : $\forall g \in L^2(X, \mu)$

$$\langle S_n f, g \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \left\langle \int_X f \, d\mu \, \mathbb{1}_X, g \right\rangle$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X f \circ T^k(x) \, g(x) \, d\mu(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_X f \, d\mu \int_X g \, d\mu$$

$(3) \Rightarrow (2)$: $A, B \in \mathcal{B}$.

on utilise (3) avec $f = \mathbb{1}_A$, $g = \mathbb{1}_B$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X \underbrace{f \circ T^k}_{\mathbb{1}_{T^{-k}(A)}} \cdot \underbrace{g}_{\mathbb{1}_B} \, d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \underbrace{\int_X f \, d\mu}_{\int_X \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)} \underbrace{\int_X g \, d\mu}_{\mu(B)}$$

$$f \circ T^k = \mathbb{1}_A \circ T^k = \mathbb{1}_{T^{-k}(A)}$$

$$\left(\mathbb{1}_A \circ T^k(x) = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \ \underline{\text{ssi}} \ T^k(x) \begin{matrix} \in \\ \notin \end{matrix} A \ \underline{\text{ssi}} \ x \begin{matrix} \in \\ \notin \end{matrix} T^{-k}(A) \ \underline{\text{ssi}} \ \mathbb{1}_{T^{-k}(A)}(x) = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

d'où $$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X \underbrace{\underbrace{\mathbb{1}_{T^{-k}(A)} \cdot \mathbb{1}_B}_{\mathbb{1}_{T^{-k}(A) \cap B}}}_{\mu(T^{-k}(A) \cap B)} \, d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu(A) \, \mu(B)$$

$(2) \Rightarrow (1)$:

Supposons $T^{-1}(A) = A$; m.q. $\mu(A) = 0$ ou $\mu(X \setminus A) = 0$ (ou $\mu(A) = 1$ ici)

$\rightsquigarrow$ on applique (2) avec A et $B = X \setminus A$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\mu\Big(\underbrace{\underbrace{T^{-k}(A)}_{A} \cap (X \setminus A)}_{\emptyset}\Big)}_{0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu(A)\,\mu(X \setminus A)$$

donc $0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu(A)\,\mu(X \setminus A)$ d'où $\mu(A) = 0$ ou $\mu(X \setminus A) = 0$.

($\mu(T^{-k}(A) \cap B)$ est la proportion de points de $T^{-k}(A)$ qui appartiennent à B

donc (2) nous dit qu'en moyenne, cette proportion tend vers $\mu(A)\,\mu(B)$.)

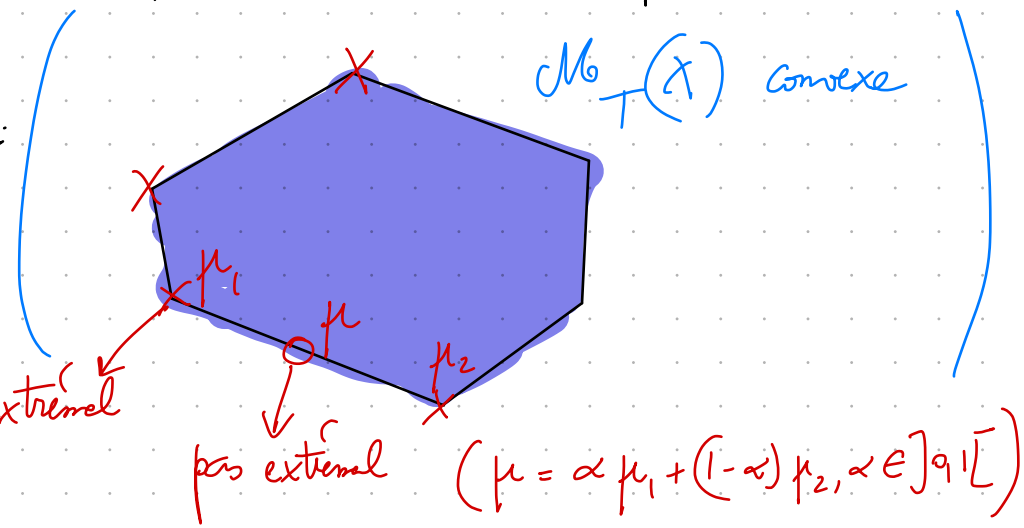
Ex. 2 :

Rappel : μ ergodique $\iff \forall A \in \mathcal{B},\ T^{-1}(A) = A \Rightarrow \mu(A) = 0$ ou 1

- Supposons que μ est non-ergodique :

il existe $A \in \mathcal{B}$ t.q. $T^{-1}(A) = A$

et $0 < \mu(A) < 1$



On définit
$$\begin{cases} \mu_A := \dfrac{1}{\mu(A)}\, \mu|_A \\ \mu_{X\setminus A} := \dfrac{1}{\mu(X\setminus A)}\, \mu|_{X\setminus A} \end{cases}$$

$\hookrightarrow \mu|_A(B) := \mu(A \cap B),\ \forall B \in \mathcal{B}$

(on renormalise pour avoir une mesure de proba. : $\mu_A(X) = \dfrac{1}{\mu(A)} \overbrace{\mu|_A(X)}^{\mu(A\cap X)} = 1$)

De plus $\mu_A, \mu_{X\setminus A} \in \mathcal{M}_T(X)$: par ex. pour μ_A, on a :

$$\forall B \in \mathcal{B},\ T_*\mu_A(B) = \mu_A\left(T^{-1}(B)\right)$$

$$= \frac{1}{\mu(A)}\,\mu\Big(\underbrace{\underbrace{A}_{T^{-1}(A) \text{ car } A \text{ est } T\text{-invariant}} \cap T^{-1}(B)}_{T^{-1}(A\cap B)}\Big)$$

$$= \frac{1}{\mu(A)}\,\underbrace{T_*\mu}_{\mu}(A\cap B) = \mu_A(B).$$

donc μ_A est T-invariante ; de même pour $X\setminus A$ (car A est T-invariant alors $X\setminus A$ aussi)

$\rightsquigarrow$ on a $\mu = \mu(A)\,\dfrac{\mu|_A}{\mu(A)} + (1-\mu(A))\,\dfrac{\mu|_{X\setminus A}}{(1-\mu(A))}$

(car $\mu(B) = \underbrace{\mu(A\cap B)}_{\mu(A)\,\frac{\mu_A(B)}{\mu(A)}} + \mu((X\setminus A)\cap B),\ \forall B\in\mathcal{B}$)

$$= \underbrace{\mu(A)}_{\alpha\in]0,1[}\,\mu_A + \underbrace{(1-\mu(A))}_{1-\alpha\in]0,1[}\,\mu_{X\setminus A}$$

Conclusion : μ n'est pas extrémale.

- autre implication : y réfléchir.

Ex. 3 :

(1) $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $r_\alpha : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$, $x \mapsto x+\alpha \mod 1$.

Supposons $\mu \in \mathcal{M}_{r_\alpha}(\mathbb{T}^1)$, ($\neq \emptyset$ car $\mathbb{T}^1$ est compact)

i.e. $(r_\alpha)_* \mu = \mu$. $(*)$

Rappel : $r_\alpha^n : x \longmapsto x + n\alpha \mod 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$(*) \Rightarrow \forall n \geq 0$, $\underbrace{(r_\alpha)_*^n \mu}_{(r_{n\alpha})_* \mu} = \mu$.

Mais $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Longrightarrow ([n\alpha])_{n\geq 0}$ est dense dans $\mathbb{T}^1$.

donc $\forall [\beta] \in \mathbb{T}^1$, $\exists (n_k) \nearrow$ suite d'entiers t.q. $[n_k\alpha] \xrightarrow[k\to+\infty]{} [\beta]$.

Comme $\underbrace{\left(r_{k\alpha}\right)}_{\downarrow \; r_\beta}{}_* \mu = \mu$, on déduit en passant à $k \to +\infty$:

(*) $\left(r_\beta\right)_* \mu = \mu$: en d'autres termes, μ est invariante par toutes les rotations.

(on déduit que μ est la mesure de Haar sur $\mathbb{T}^1$, donc c'est Lebesgue)

Montrons directement que c'est Lebesgue :

- μ ne peut pas avoir d'atome. Si $x \in \mathbb{T}^1$ t.q. $\mu(\{x\}) = c > 0$

  alors $\forall n$, $\mu(\{x + n\alpha\}) = c > 0$

  donc comme $(x + n\alpha)_{n \geq 0}$ est infinie on a $\mu(X) = +\infty$: absurde

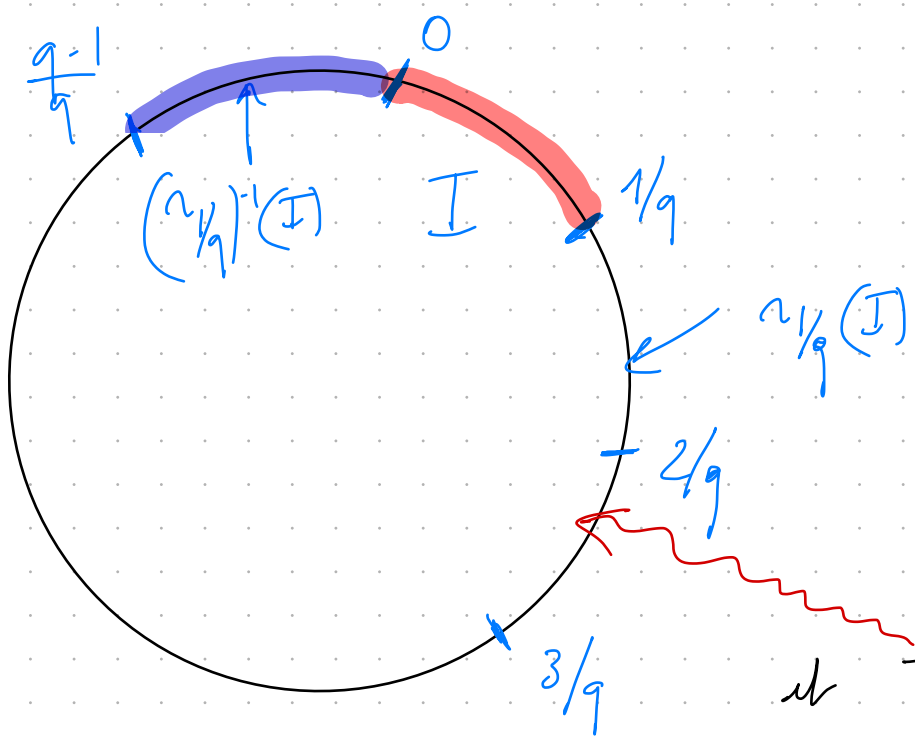
- montrons que $\forall$ intervalle I de longueur $\frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}^*$, on a

  $\mu(I) = \text{Lebesgue}(I)$.

(En effet, on aura bien alors que μ = Lebesgue comme les intervalles engendrent la tribu des boréliens)

Soit donc $I \subset \mathbb{T}^1$ intervalle de longueur $\frac{1}{q}$.

D'après (*), $(r_{1/q})_* \mu = \mu$, donc $\underbrace{(r_{1/q})_* \mu(I)}_{\mu(r_{1/q}^{-1}(I))} = \mu(I)$



$$\mu(r_{2/q}^{-1}(I)) = \mu(I)$$

$$\vdots$$

$$\mu\left(r_{\frac{q-1}{q}}^{-1}(I)\right) = \mu(I)$$

et $\mathbb{T}^1 = \bigcup_{k=0}^{q-1} r_{k/q}^{-1}(I)$

donc $1 \underset{\mu \text{ de proba.}}{=} \mu(\mathbb{T}^1) \underset{\text{pas d'atomes et les } (r_{k/q}^{-1}(I))_{k=0,\dots,q-1} \text{ 2 à 2 disjoints}}{=} \sum_{k=0}^{q-1} \mu(r_{k/q}^{-1}(I))$

donc $$1 = \sum_{k=0}^{q-1} \underbrace{(r_{k/q})_* \mu}_{\mu \text{ car } \mu \text{ est invariante par les rotations}} (I)$$

$$= q\,\mu(I)$$

d'où $\mu(I) = \frac{1}{q} = \text{Lebesgue}(I)$, ce qui conclut.

(2) Montrons que T uniquement ergodique $\Rightarrow$ (b)

Soit μ l'unique mesure invariante. Soit $f \in C^0(X)$.

Supposons que les moyennes de Birkhoff $S_n f$ ne CV pas uniformément vers $\int f\,d\mu$.

Alors $\exists \varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists N_k$ arbitrairement grand $(\geq k)$

$\exists x_k \in X$ t.q.

(H) $$S_{n_k} f(x_k) \notin \left] \left(\int_X f\,d\mu\right) - \varepsilon, \left(\int_X f\,d\mu\right) + \varepsilon \right[$$

$$S_{n_k} f(x_k) = \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f \circ T^j(x_k)$$

mais $f(x_k) = \int_X f \, \delta_{x_k}$ et plus généralement, $f \circ T^j(x_k) = \int_X f \, \delta_{T^j(x_k)}$

donc $$S_{n_k} f(x_k) = \int_X f \underbrace{\left(\frac{1}{n_k} \left(\delta_{x_k} + \dots + \delta_{T^{n_k-1}(x_k)} \right) \right)}_{\text{on note } \mu_k \text{ cette mesure}}$$

(μ_k est une mesure de probabilité comme combinaison convexe de Dirac)

Comme X est compact, quitte à extraire on peut supposer que $\mu_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \mu'$.

Alors μ' est $\begin{cases} \text{une mesure de probabilité} \\ T\text{-invariante} : \quad T_* \mu_k = \frac{1}{n_k} \left(\delta_{T(x_k)} + \dots + \delta_{T^{n_k}(x_k)} \right) \end{cases}$

$$= \mu_k + \frac{1}{n_k} \left(\delta_{T^{n_k}(x_k)} - \delta_{x_k} \right)$$

$\left(T_* \delta_a(x) = 1 \ \underline{\text{ssi}} \ T^{-1} x = a \ \underline{\text{ssi}} \ x = T(a) \right)$
donc $T_* \delta_a = \delta_{T(a)}$

donc quand $k \to +\infty$, on a : $T_* \mu_k - \mu_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

i.e. $T_* \mu' = \mu'$.

En résumé, $\mu_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mu' \in \mathcal{M}_T(X)$

Mais d'après (H), on a que $S_{n_k} x_k = \int_X f \, d\mu_k \notin \left] \int_X f \, d\mu - \varepsilon, \int_X f \, d\mu + \varepsilon \right[$

donc $\int_X f \, d\mu_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \int_X f \, d\mu' \neq \int f \, d\mu$.

donc $\mu' \in \mathcal{M}_T(X)$ et $\mu' \neq \mu$:

c'est absurde car T est uniquement ergodique.