# Td 4 de Systèmes Dynamiques

M1, Université de Picardie Jules Verne, 2021

# Td 4 (feuille 3)

## Ex. 6

2) Si $f, g \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ relevés par $F, G \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, alors

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad -1 < F^k(x) - x - k\rho(F) < 1$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ $\quad -1 < -G^k(x) + x + k\rho(G) < 1$

on additionne

$$\Longrightarrow \quad -\frac{2}{k} - \frac{F^k(x) - G^k(x)}{k} < \rho(F) - \rho(G) < \frac{2}{k} + \frac{F^k(x) - G^k(x)}{k} \qquad (*)$$

Or $(F, G) \xmapsto[\Phi]{} (F \circ G)$ est $C^0$ pour la topologie induite par $d$

$$\left( d(F,G) = \max\left(d_\infty(F,G), d_\infty(F^{-1}, G^{-1})\right)\right)$$

$\rightsquigarrow$ en particulier, $F \longmapsto \underbrace{F^2 = F \circ F}_{\Phi(F,F)}$ est continue

De même, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $F \longmapsto F^k$ est continue.

Soit $\varepsilon > 0$. On fixe $k \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{2}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $F \mapsto F^k$ est continue, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, k) > 0$ t.q.

$$d(F, G) < \delta \implies d(F^k, G^k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc d'après $(*)$ on déduit que si $d(F, G) < \delta$,

alors
$$|\rho(F) - \rho(G)| < \underbrace{\frac{2}{k}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2k} < \varepsilon$$

donc on a bien que $F \longmapsto \rho(F)$ est continue

donc $\underset{\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)}{f} \longmapsto \rho(f)$ est aussi continue.

$\left(\rho(f) = \pi(\rho(F))\right.$ où $F$ relève $\left.f\right)$

## Ex. 7 :

$$f = h_0 \circ r_\alpha \circ h_0^{-1} \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1), \quad r_\alpha : x \longmapsto x+\alpha \mod 1, \alpha \notin \mathbb{Q}.$$

$$h_0 \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$$

1) Supposons que $h \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ satisfait $h \circ r_\alpha = r_\alpha \circ h$.

$$n \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow h \circ r_\alpha^n = \underbrace{(h \circ r_\alpha)}_{r_\alpha \circ h} \circ r_\alpha^{n-1} = r_\alpha \circ (h \circ r_\alpha^{n-1})$$

$$= \dots \quad (\text{récurrence})$$

$$= r_\alpha^n \circ h$$

i.e. $$h\left(\underbrace{r_\alpha^n([x])}_{[x+n\alpha]}\right) = \underbrace{r_\alpha^n \circ h([x])}_{[h([x])+n\alpha]}, \quad \forall [x] \in \mathbb{T}^1$$

i.e. $$h([z]+n[\alpha]) = h([z]) + n[\alpha], \quad \forall z \in \mathbb{T}^1.$$

Pour $z = 0 \in \mathbb{T}^1$, on déduit :

$$h\left(n[\alpha]\right) = h(0) + n[\alpha], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$\alpha \notin \mathbb{Q}$, donc $\{n[\alpha] : n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{T}^1$

donc $\forall y \in \mathbb{T}^1$, $\exists (n_k)_k \nearrow$ suite d'entiers t.q.

$$n_k[\alpha] \xrightarrow[k \to +\infty]{} y$$

$$\begin{array}{ccc} h\left(n_k[\alpha]\right) & \xrightarrow[k \to +\infty]{} & h(y) \\ \| & & \| \\ h(0) + n_k[\alpha] & \xrightarrow[k \to +\infty]{} & h(0) + y \end{array}$$

$\Rightarrow$ $h(y) = h(0) + y$, $\forall y \in \mathbb{T}^1$ : $h$ est une rotation (translation) d'angle $h(0)$.

Conclusion : les éléments qui commutent avec une rotation irrationnelle sont les rotations.

2) $f = h_0 \circ r_\alpha \circ h_0^{-1}$.

Trouver les $h \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ t.q. $f = h \circ r_\alpha \circ h^{-1}$.

$$\Longrightarrow \quad h_0 \circ r_\alpha \circ h_0^{-1} = h \circ r_\alpha \circ h^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad (h^{-1} \circ h_0) \circ r_\alpha \circ \underbrace{(h_0^{-1} \circ h)}_{(h^{-1} \circ h_0)^{-1}} = r_\alpha$$

(on compose par $h_0^{-1}$ à gauche, $h_0$ à droite)

i.e. pour $f = h^{-1} \circ h_0 \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$, on a :

$f \circ r_\alpha = r_\alpha \circ f$ donc qu. 1) $\Rightarrow$ $f$ (et $f^{-1}$) est une rotation

$$f^{-1} = h_0^{-1} \circ h : [x] \longmapsto [x] + [\beta], \quad [\beta] \in \mathbb{T}^1$$

donc $h = h_0 \circ f^{-1} : [x] \longmapsto h_0([x] + [\beta])$.

Ex. 9

2) $F, G \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ t.q. $F \circ G = G \circ F$ ($F, G$ commutent).

Alors $\rho(F \circ G) = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{(F \circ G)^n(x) - x}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

mais $(F \circ G)^n = F^n \circ G^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

par récurrence : • si $n = 1$, $(F \circ G)^1 = F \circ G = F^1 \circ G^1$ ✓

• si c'est vrai pour $n$, i.e. $(F \circ G)^n = F^n \circ G^n$

alors $(F \circ G)^{n+1} = \underbrace{(F \circ G)^n}_{\substack{F^n \circ G^n \\ (\text{H.R.})}} \circ \underbrace{(F \circ G)}_{\substack{G \circ F \\ (F, G \text{ commutent})}}$

$= F^n \circ \underbrace{G^{n+1} \circ F}_{F \circ G^{n+1}}$ (car $F, G$ commutent)

$= F^{n+1} \circ G^{n+1}$. ∎

$\rightsquigarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \rho(F\circ G) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(F\circ G)^n(x) - x}{n}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{F^n(G^n(x)) - x}{n}}$$

par ce qu'on vient de voir

$$= \frac{F^n(G^n(x)) - G^n(x)}{n} + \frac{G^n(x) - x}{n}$$

$\forall n, \forall x, \quad -1 < F^n(G^n(x)) - G^n(x) - n\rho(F) < 1,$

$$\Rightarrow \left| \frac{F^n(G^n(x)) - G^n(x)}{n} - \rho(F) \right| < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(G^n(x)) - G^n(x)}{n} = \rho(F)$$

et de même, $\lim_{n\to+\infty} \frac{G^n(x) - x}{n} = \rho(G)$

$\Rightarrow \rho(F\circ G) = \rho(F) + \rho(G).$

$\blacksquare$

# Ex. 13

1) $[x_1], \dots, [x_N] \in \mathbb{T}^1$ cycliquement ordonnés.

$$\sum_{i=1}^{N-1} \Big| \underbrace{\varphi([x_{i+1}]) - \varphi([x_i])}_{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i) = \varphi'(y_i) \times (x_{i+1} - x_i)\ ,\ y_i \in [x_i, x_{i+1}]} \Big| \quad (*)$$

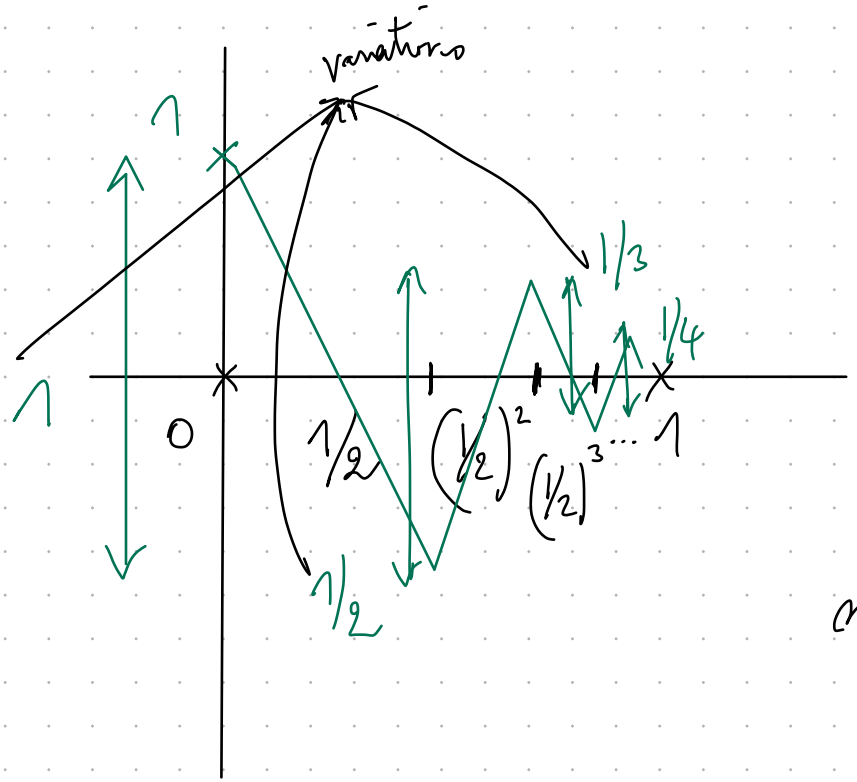
accroissements finis

$\varphi'$ est $C^0$ sur $\mathbb{T}^1$ (compact) donc $\exists\, K > 0$ t.q. $\sup_{\mathbb{T}^1} |\varphi'| \leq K$

donc $(*) \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} \Big| \varphi([x_{i+1}]) - \varphi([x_i]) \Big| \leq K \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)}_{\underbrace{x_N - x_1}_{|\cdot| \leq 1}} \leq K$

donc $\varphi$ est VB avec $VB(\varphi) \leq K = \sup_{\mathbb{T}^1} \varphi'$.

2)




La fonction $F$ avec ce graphe est continue sur $[0,1]$

$$\left( \text{et } \lim_{x \to 1} F(x) = 0 \right)$$

mais les variations ne sont pas bornées.

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty \right)$$

**Ex. 8 :** $F_t : x \longmapsto x + \alpha \sin(2\pi x) + t.$

1) M.q. $\forall q \geq 1$, $z \overset{G}{\longmapsto} F_t^q(z) - z$ n'est pas constante sur $\mathbb{C}$.

On va m.q. $G' \not\equiv 0$.

$\forall z \in \mathbb{C}, \quad F_t'(z) = 1 + 2\pi\alpha \cos(2\pi z) \neq 0$ donc c'est vrai pour $q = 1$

($F_t$ est holomorphe car sin et id le sont)

Pour $q \geq 2$, $\left(F_t^q\right)'(z) = \prod_{k=0}^{q-1} F_t'\left(F_t^k(z)\right)$

$$= \prod_{k=0}^{q-1} \left(1 + 2\pi\alpha \cos\left(2\pi F_t^k(z)\right)\right)$$

Si $q \geq 2$ : $\left(F_t^q\right)'(z) = \left(1 + 2\pi\alpha \cos(2\pi z)\right) \underbrace{\prod_{k=1}^{q-1} \left(1 + 2\pi\alpha \cos\left(2\pi F_t^k(z)\right)\right)}_{\left(F_t^{q-1}\right)'\left(F_t(z)\right)}$

- Montrons que $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjectif

En effet, $\forall w \in \mathbb{C}$, on cherche $z$ t.q. $\cos(z) = w$

i.e. $e^{iz} + e^{-iz} = 2w$

i.e. $v^2 - 2wv + 1 = 0$

avec $v = e^{iz}$

$\rightsquigarrow \Delta = 4(w^2 - 1)$

et $v = e^{iz} = \underbrace{w \pm \sqrt{w^2-1}}_{\neq 0}$ (sinon $w^2 = w^2 - 1$)

$\rightsquigarrow z = \frac{1}{i} \log\left(w \pm \sqrt{w^2-1}\right)$.

donc on a bien que $\cos$ est surjectif (en tant que fonction holomorphe)

$\rightsquigarrow$ Supposons par l'absurde que $\left(F\frac{1}{t} - id\right)$ est constante sur $\mathbb{C}$.

Alors $\left(F\frac{1}{t}\right)'(z) = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

$\forall z \in \mathbb{C}$, on a donc

$$1 = \left(F_t^q\right)'(z) = \underbrace{\left(1 + 2\pi\alpha \cos(2\pi z)\right)}_{} \times \left(F_t^{q-1}\right)'\left(F_t(z)\right)$$

Comme cos est surjectif d'après ce qui précède, il existe $z \in \mathbb{C}$ t.q. $1 + 2\pi\alpha \cos(2\pi z) = 0$

$\left(\cos(2\pi z) = -\frac{1}{2\pi\alpha}\right)$

Absurde car le produit est $= 1$ (donc $\neq 0$)

donc $F_t^q - id$ n'est pas constante sur $\mathbb{C}$ (ni sur $\mathbb{R}$ par le principe des zéros isolés)

2) $[x] \in \mathbb{T}^1$ est $f_t$-périodique $\iff \exists\, p, q$ t.q. $F_t^q(x) - x = p$

$\Longrightarrow \rho(F_t) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

$\rightsquigarrow$ Supposons donc que $\rho(F_t) = \frac{p}{q}$, $\begin{array}{l} p \in \mathbb{Z} \\ q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{array}$.

Alors tous les points périodiques pour $f_t$ sont $q$-périodiques.

Si $x \in \mathbb{R}$ relève un point $q$-périodique (pour $f_t$), $F_t^q(x) - x \in \mathbb{Z}$

mais alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $F_t^q(x+k) - (x+k) = F_t^q(x) - x \in \mathbb{Z}$

donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $x + k \in A = \{ y \in [0,1] \,.\, F_t^q(y) - y \in \mathbb{Z} \}$.

Il suffit donc de m.q. $A$ est fini.

Comme $[0,1]$ est compact, si $A$ est infini, il possède un point d'accumulation $y \in [0,1]$

Or il y a au plus une valeur entière de $F_t^q - id$

(sinon, si $F_t^q(\tilde{z}) - \tilde{z} = \tilde{p} \neq p$ alors $\rho(F) = \frac{\tilde{p}}{q} \neq \frac{p}{q}$)

donc $\{ F_t^q - id - p = 0 \} \cap [0,1]$ a un point d'accumulation

et donc $F_t^q - id - p$ est constante, ce qui contredit 1). $\blacksquare$

3) • $t \overset{\Phi}{\longmapsto} F_t$ est $C^0$ (car 1-Lipschitz) et $G \overset{\Psi}{\longmapsto} \rho(G)$ est $C^0$ d'après ex. 6

donc $t \overset{\Omega}{\longmapsto} \rho(F_t)$ est $C^0$.

$(= \Psi \circ \Phi)$

• d'après le cours, si $F(x) \leq G(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $\rho(F) \leq \rho(G)$

i.e. $G \overset{\Psi}{\longmapsto} \rho(G)$ est croissante.

Comme $t \overset{\Phi}{\longmapsto} F_t$ est croissante $\left( F_{t_2}(x) - F_{t_1}(x) = t_2 - t_1 \geq 0 \text{ si } t_2 \geq t_1 \right)$

on déduit que la composition $t \overset{\Omega}{\longmapsto} \rho(F_t)$ est croissante.

$(= \Psi \circ \Phi)$

• $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{t+1}(x) = F_t(x) + 1$

donc $\rho(F_{t+1}) = \rho(F_t + 1) = \rho(F_t) + 1$ d'après le cours

- $r$ est $C^0$ et $r(x+1) = r(x)+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

  donc $\lim\limits_{+\infty} r = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} r = -\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective.

  En fait $r(0) = 0$ ($F_0 : x \mapsto x + \alpha \sin(2\pi x)$ a un point fixe : $0$, car $F_0(0) = 0$, donc son nombre de rotation $\rho(F_0) = r(0)$ est nul)

  et $r(1) = r(0) + 1 = 1$

  donc $r : [0,1] \to [0,1]$.

- Comme $r$ est croissante, $\forall a \in \mathbb{R}$, $r^{-1}(\{a\})$ est un intervalle (possiblement réduit à 1 point)