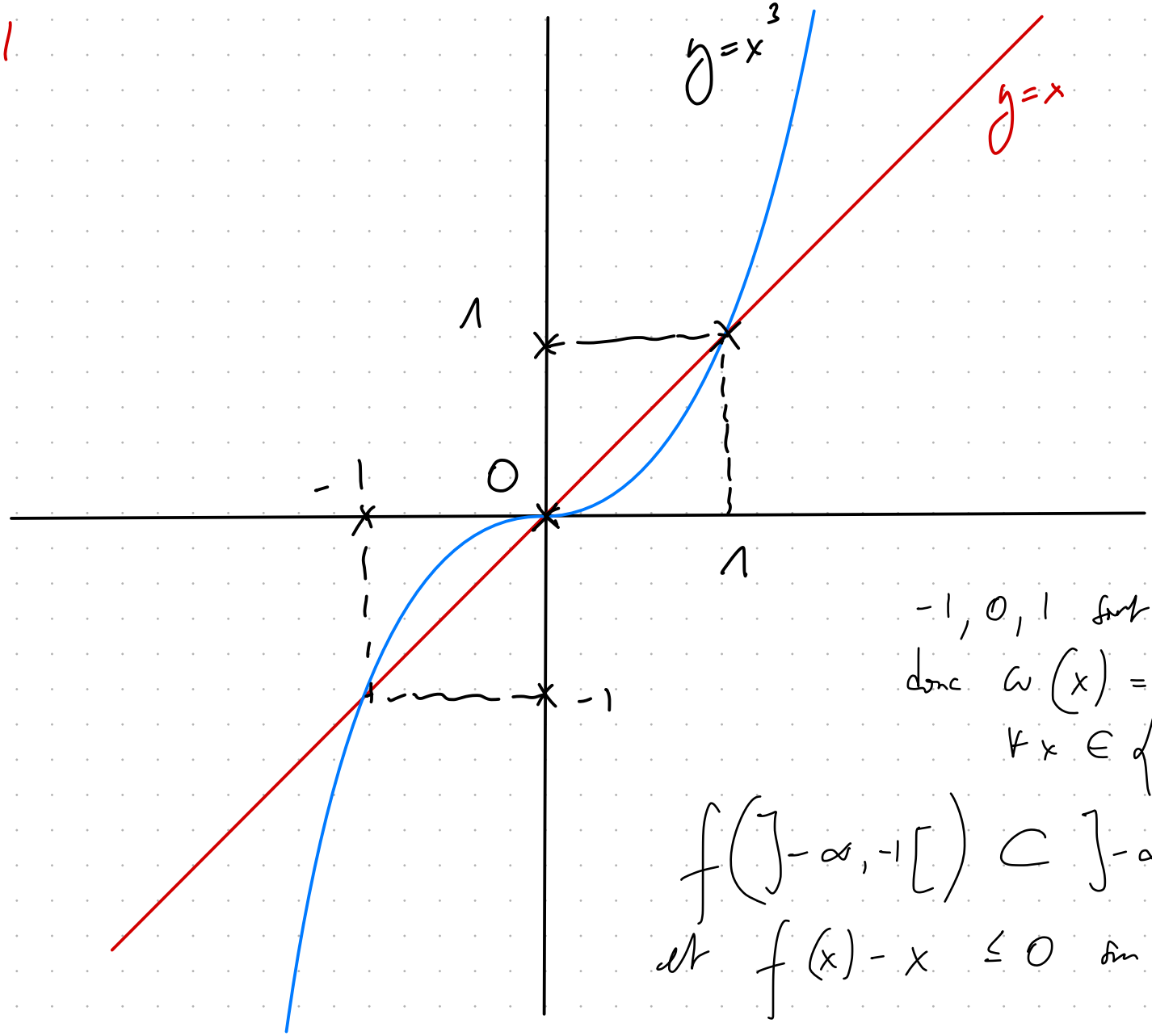
Td 2 de Systèmes dynamiques

M1, 2021, Université de Picardie Jules Verne

Systèmes dynamiques (TD2)

Ex. 1



$-1, 0, 1$ sont des points fixes

donc $\omega(x) = \alpha(x) = x$

$\forall x \in \{-1, 0, 1\}$.

$$f\left(\left]-\infty, -1\right[\right) \subset \left]-\infty, -1\right[$$

et $f(x) - x \leq 0$ sur $\left]-\infty, -1\right[$

donc si $x_0 \in]-\infty, -1[$, $\left(f^n(x_0)\right)_{n\geq 0} \searrow$ donc CV vers $x_\infty \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$\left(f^{n+1}(x_0) = f\left(f^n(x_0)\right) \leq f^n(x_0)\right)$$

Si $\left(f^n(x_0)\right)_n$ CV vers $x_\infty \in \mathbb{R}$ $(\neq -\infty)$ alors

$f(x_\infty) = x_\infty$ mais pas possible car $x_0 < -1$.

donc $\left(f^n(x_0)\right) \searrow -\infty$ et alors $\omega(x_0) = -\infty$

De même, $\left(f^{-n}(x_0)\right)_{n\geq 0} \nearrow$ car $f^{-(n+1)}(x_0) - f^{-n}(x_0)$

$$= \underbrace{-\Big[\underbrace{f\big(\underbrace{f^{-n}(x_0)}_{\in\,]-\infty,-1[}\big) - f^{-n}(x_0)}_{\leq 0}\Big]}_{\geq 0}$$

et majorée par -1 donc CV vers un point fixe

donc $\left(f^{-n}(x_0)\right)$ CV vers -1

et donc $\alpha(x_0) = -1$.

- $x_0 \in \underbrace{]-1,0[}_{\text{stable}}$, $f(x) - x \geq 0$ sur $]-1,0[$ donc

$(f^n(x_0))_n \nearrow$ majorée par 0 donc CV vers un pt fixe

$\rightsquigarrow (f^n(x_0))$ CV vers 0.

$$\left(f'(x) = 3x^2 \text{ donc } \underset{\underset{|f'(1)|}{\parallel}}{|f'(-1)|} = 3 > 1 \text{ donc } -1, 1 \text{ sont des points fixes répulsifs} \right)$$

$\rightsquigarrow \omega(x_0) = 0$

$\alpha(x_0) = -1$

- $x_0 \in]0,1[$: $\omega(x_0) = 0$ et $\alpha(x_0) = 1$
- $x_0 \in]1,+\infty[$: $\omega(x_0) = +\infty$ et $\alpha(x_0) = 1$.

Ex. 2

1) Supposons $\omega(x) = X$.

Soit U, V ouverts de X.

$$\omega(x) = \bigcap_{m \geq 0} \overline{\mathcal{O}^+(T^m(x))} = X$$

$\Rightarrow \forall m \geq 0, \quad \mathcal{O}^+(T^m(x))$ est dense dans X

En particulier, $\exists\, m \geq 0$ t.q. $T^m(x) \in V$.

Comme $\mathcal{O}^+(T^m(x))$ est dense, $\exists\, n \geq 0$ t.q. $T^{m+n}(x) \in U$.

Donc $T^m(x) \in V \cap T^{-n}(U)$.

En particulier, $\forall\, U, V$ ouverts, $\exists\, n \geq 0$ t.q. $V \cap T^{-n}(U) \neq \emptyset$,
ce qui conclut.

2) a) $\omega(x) = X \iff \bigcap_{m \geq 0} \overline{\mathcal{O}^+(T^m(x))} = X$

$\iff \forall\, m \geq 0,\ \mathcal{O}^+(T^m(x))$ est dense dans X

$\iff \forall\, m \geq 0,\ \forall\, i \in \mathbb{N},\ \mathcal{O}^+(T^m(x)) \cap U_i \neq \emptyset$

(car $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base dénombrable d'ouverts de la topologie)

De plus, $\mathcal{O}^+(T^m(x)) \cap U_i \neq \emptyset$

$\iff \exists\, n \geq m$ t.q. $T^n(x) \in U_i$

$\iff \exists\, n \geq m$ t.q. $x \in T^{-n}(U_i)$

$$\iff x \in \underbrace{\bigcup_{n \geq m} \underbrace{T^{-n}(U_i)}_{\text{ouvert car } T \text{ est } C^0 \text{ et } U_i \text{ ouvert}}}_{\text{ouvert}} =: O_{i,m}$$

b) Supposons que T est positivement transitif $\left(\forall U, V \text{ ouverts}, \exists n \geq 0 \text{ t.q. } T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset\right)$.

On rappelle que $O_{i,m} = \bigcup_{n \geq m} T^{-n}(U_i)$

Montrons que $O_{i,m}$ est dense

Pour cela, il suffit de m.q. $\forall j$, $O_{i,m} \cap U_j \neq \emptyset$.

Soit $j \geq 0$.

Par l'hypothèse que T est positivement transitif, et comme $T^{-m}(U_i)$ est ouvert,

$\exists k \geq 0$ t.q. $T^{-k}\left(T^{-m}(U_i)\right) \cap U_j \neq \emptyset$,

i.e. $\underbrace{T^{-(k+m)}(U_i)}_{\subset \bigcup_{n \geq m} T^{-n}(U_i)} \cap U_j \neq \emptyset$.

D'où $\left(\bigcup_{n \geq m} T^{-n}(U_i)\right) \cap U_j \neq \emptyset$, i.e. $O_{i,m} \cap U_j \neq \emptyset$. ∎

Conclusion : soit $\mathcal{Y} = \{x \in X : \omega(x) = X\}$.

D'après 2) a), $\mathcal{Y} = \{x \in X : \forall m \geq 0, \forall i \geq 0, x \in O_{i,m}\}$

$$= \bigcap_{m \geq 0} \bigcap_{i \geq 0} O_{i,m}$$

Chaque $O_{i,m}$ est ouvert, et on vient de m.q. il est dense $\left(\overline{O_{i,m}} = X\right)$

donc $\mathcal{Y}$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Par la propriété de Baire, $\mathcal{Y}$ est un G_δ-dense ; en particulier $\overline{\mathcal{Y}} = X$.

On a montré : si X est un espace de Baire séparable et $T : X \to X$ est C^0,

alors $\{x \in X : \omega(x) = X\}$ est dense.

Ex. 3

1) $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. On dit que z est un point critique si $P'(z) = 0$.

$A : z \mapsto az+b$.

M.q. si z_0 est critique pour P, alors $A(z_0)$ est critique pour $\underbrace{A \circ P \circ A^{-1}}_{Q}$.

M.q. $Q'(A(z_0)) = 0$.

On a $(A \circ P \circ A^{-1})'(A(z_0)) = A'(P \circ A^{-1}(A(z_0))) \times \overbrace{P'(A^{-1}(A(z_0)))}^{P'(z_0) = 0}$

$\times (A^{-1})'(A(z_0))$

$= 0$.

donc $A(z_0)$ est un point critique de $A \circ P \circ A^{-1}$.

2) $P(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

M.q. $\exists\ A : z \mapsto az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$ t.q.

$A \circ P \circ A^{-1} = z^2 + c$

Point critique de P ? $P'(z) = 2\alpha z + \beta$

donc z_0 est critique pour P <u>ssi</u> $2\alpha z_0 + \beta = 0$

<u>ssi</u> $z_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Si A conjugue P à $z^2 + c = Q(z)$

alors d'après 1), $A(z_0)$ est un point critique de Q

Mais $Q'(z) = 2z$ donc le seul point critique de Q est 0

Donc on doit avoir $A(z_0) = 0$

i.e. $az_0 + b = 0$, i.e., $-\frac{a\beta}{2\alpha} + b = 0$, <u>ssi</u> $b = \frac{a\beta}{2\alpha}$.

(i.e., $2\alpha b - a\beta = 0$.)

A est nécessairement de la forme $z \longmapsto a\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)$.

On cherche $\underset{c}{a}$ t.q. $A \circ P \circ A^{-1}(z) = z^2 + c$.

$$\text{i.e. } A\left(P(z)\right) = \left(A(z)\right)^2 + c$$

$$\text{i.e. } a\left(P(z) + \frac{\beta}{2\alpha}\right) = a^2\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + c$$

$$\text{i.e. } a\left(\alpha z^2 + \beta z + \gamma + \frac{\beta}{2\alpha}\right) = a^2\left(z^2 + \frac{\beta z}{\alpha} + \frac{\beta^2}{(2\alpha)^2}\right) + c$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a\alpha = a^2 \\ a\beta = \dfrac{a^2\beta}{\alpha} \\ c = a\gamma + \dfrac{a\beta}{2\alpha} - \dfrac{a^2\beta^2}{4\alpha^2} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $a = \alpha$ convient :

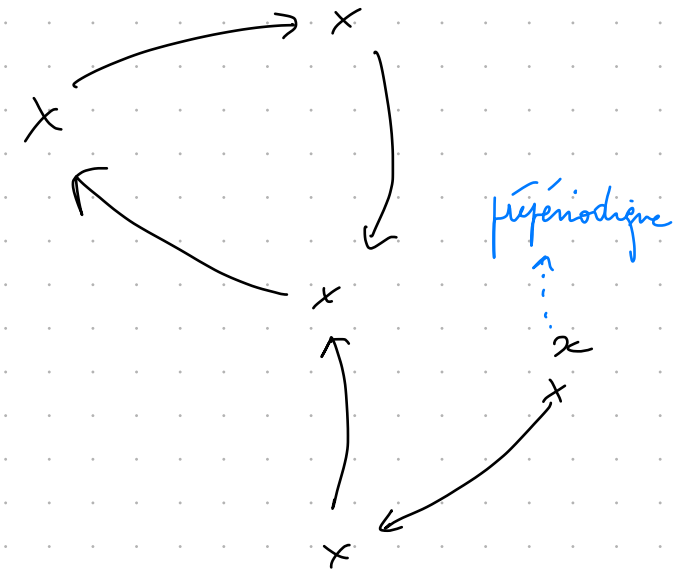
$\rightsquigarrow$ $A(z) = \alpha z + \frac{\beta}{2}$

$$A \circ P \circ A^{-1}(z) = z^2 + \underbrace{\left(\alpha\gamma + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4}\right)}_{c}$$

Ex. 4 :

1) ex. : $x \mapsto x^2$ $\rightsquigarrow$ (-1) est prépériodique

$\left((-1)^2 = 1 \text{ et } 1 \text{ est fixe} \right)$



Supposons T bijectif et

$$T^m(x) = T^n(x) \quad , \quad m > n > 0$$

$$\Big\Downarrow T^{-m}$$

$$x = T^{\overbrace{n-m}^{q}}(x) \quad \text{donc} \quad T^q(x) = x$$

et alors x est périodique

donc pas de points prépériodiques

2) X fini. M.q. $\forall x \in X$, $\exists\, q > 0$ t.q. $T^q(x) = x$

ou $\exists\, m > n > 0$ t.q. $T^m(x) = T^n(x)$.

Principe des tiroirs : on note $\{x_i \ , \ i = 1, \dots, n\}$ les éléments de X.

Alors $\forall i$, $\mathcal{O}^+(x_i) = \{T^k(x_i) \ , \ k \geq 0\}$ est infini

donc $\exists \ k > l \geq 0$ t.q. $T^k(x_i) = T^l(x_i) = x_j$,
$j \in \{1, \dots, n\}$.

donc x_i est périodique ou prépériodique

$$T^{\overbrace{k-l}^{>0}}\left(T^l(x_i)\right) = T^l(x_i)$$

donc $T^l(x_i)$ est périodique.

3) a) Soit x périodique : $\mathcal{O}(x) = \{x, T(x), \dots, T^{q-1}(x)\}$, $q > 0$ période de x.

donc $\mathcal{O}(x)$ est compact.

b) Soit K compact dénombrable. Montrons qu'il existe un point isolé $x \in K$,

i.e., t.q. $B(x, \varepsilon) \cap K = \{x\}$, pour un certain $\varepsilon > 0$.

K dénombrable $\rightsquigarrow$ $K = \{x_0, x_1, \dots\}$.

Remarque : K est compact donc complet, donc vérifie la propriété de Baire (toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense).

Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de point isolé :

Alors $\forall i \geq 0$, $K \setminus \{x_i\}$ est ouvert et dense. (dans la topologie de K)

Par la propriété de Baire, on déduit que $\underbrace{\bigcap_{i=0}^{+\infty} (K \setminus \{x_i\})}_{K \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \{x_i\}\right) = K \setminus K = \emptyset}$ est dense

$\longrightarrow$ absurde !

- Montrons à présent (ii) $\Rightarrow$ (i) :

On suppose $\mathcal{O}(x) = \{ T^i(x),\ i \in \mathbb{Z} \}$ compacte.

Alors $\mathcal{O}(x)$ est un compact dénombrable donc d'après ce qui précède,

$\exists\ i \in \mathbb{Z}$ t.q. $T^i(x)$ soit isolé, i.e., $\exists\ \varepsilon > 0$ t.q. $\forall j \neq i$, $T^j(x) \notin B(T^i(x), \varepsilon)$

Montrons que $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, $T^k(x)$ est isolé :

T est continue donc T^{k-i} aussi et alors $\exists\ 0 < \eta_1 < \eta_2$ t.q.

$$B(T^k(x), \eta_1) \subset T^{k-i}\big(B(T^i(x), \varepsilon)\big) \subset B(T^k(x), \eta_2)$$

et alors $T^j(x) \cap B(T^i(x), \varepsilon) = \emptyset$, $\forall j \neq i$

$$\Downarrow$$

T^{k-i}

$$T^{k+j-i}(x) \cap B(T^k(x), \eta_1) = \emptyset, \quad \forall j \neq i$$

$j \leftarrow j+k-i$

$$\Leftrightarrow T^j(x) \cap B(T^k(x), \eta_1) = \emptyset, \quad \forall j \neq k$$

donc $T^k(x)$ est isolé, donc tout point de $\mathcal{O}(x)$ est isolé.

Conclusion : $\mathcal{O}(x)$ compacte $\Rightarrow$ tous les points de $\mathcal{O}(x)$ sont isolés

donc $\forall\, i,\ \exists\, \varepsilon_i > 0$ t.q $\mathcal{O}(x) \cap B(T^i(x), \varepsilon_i) = \{T^i(x)\}$

$B(T^i(x), \varepsilon_i)$ est un recouvrement ouvert de $\mathcal{O}(x)$ donc par l'hypothèse que $\mathcal{O}(x)$ est compacte, $\exists$ sous-recouvrement fini : $\exists\ n \geq 1$ t.q.

$$\mathcal{O}(x) \subset \bigcup_{k=-n}^{n} B(T^k(x), \varepsilon_k)$$

Mais $B(T^k(x), \varepsilon_k) = \{T^k(x)\}$ donc $\mathcal{O}(x) = \{T^{-n}(x), \dots, x, \dots, T^n(x)\}$

donc $\mathcal{O}(x)$ est fini et par (2), on déduit que x est périodique ou ~~prépériodique~~.

pas possible car T est inversible ((1))

c) (i) $\Rightarrow$ (ii) : on raisonne comme en 3) a).

(ii) $\Rightarrow$ (i) : on raisonne comme en 3) b), mais comme T n'est plus supposé inversible, il se peut qu'on ait des points prépériodiques.

Ex. 10

1) Soit $H \in \mathcal{E}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(H)(x+1) = \frac{1}{d} H\big(\underbrace{F(x+1)}_{F(x)+d \text{ car } F \text{ de degré } d}\big)$$

$$= \frac{1}{d} H\big(\underbrace{F(x)+d}_{[F(x)+(d-1)]+1}\big)$$

$$= \frac{1}{d}\Big(H\big(F(x)+d-1\big)+1\Big) \quad \text{car } H(\cdot+1) = H(\cdot)+1$$

récurrence

$$= \dots$$

$$= \frac{1}{d}\Big(H\big(F(x)\big)+d\Big) = \frac{1}{d} H\big(F(x)\big) + 1$$

$$= \Phi(H)(x) + 1 \quad \text{donc } \Phi(H) \in \mathcal{E}.$$

- $\forall\, H_1, H_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues t.q. $H_i(x+1) = H_i(x)+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1,2\}$,

on a $(*)$ $\left[\Phi(H_2) - \Phi(H_1)\right](x) = \frac{1}{d}\left(H_2(F(x)) - H_1(F(x))\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

De plus, $H \in \mathcal{E} \iff H$ est C^0 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x+1) - (x+1) = H(x) - x$

$\iff H$ est C^0 et $H = id + \varphi$ où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^0 et 1-périodique

Soit $C^0_1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 1-périodiques.

Muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $\left(\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\right)$

c'est un espace de Banach.

D'après ci-dessus $\forall \varphi \in C^0_1(\mathbb{R})$,

$\Phi(\underbrace{id+\varphi}_{\in \mathcal{E}}) \in \mathcal{E}$, donc $\Phi(id+\varphi) - id \in C^0_1(\mathbb{R})$.

Soit alors $\Psi : C^0_1(\mathbb{R}) \to C^0_1(\mathbb{R})$

$$\varphi \mapsto \Phi(id + \varphi) - id$$

D'après (*) ci-dessus, $\forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in C^0_1(\mathbb{R})$,

$$\left[\Phi(id+\varphi_2) - \Phi(id+\varphi_1)\right](x) = \frac{1}{d}\left[\left(F(x) + \varphi_2(F(x))\right) - \left(F(x) + \varphi_1(F(x))\right)\right]$$

i.e. $$\left[\Psi(\varphi_2) - \Psi(\varphi_1)\right](x) = \frac{1}{d}\left(\varphi_2(F(x)) - \varphi_1(F(x))\right).$$

En particulier,

$$\|\Psi(\varphi_2) - \Psi(\varphi_1)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{d}\left|\varphi_2(F(x)) - \varphi_1(F(x))\right|$$

$$\leq \frac{1}{d} \sup_{\mathbb{R}} |\varphi_2 - \varphi_1|$$

$$= \frac{1}{d} \|\varphi_2 - \varphi_1\|_\infty$$

donc $\Psi : C^0_1(\mathbb{R}) \to C^0_1(\mathbb{R})$ est $\underbrace{\frac{1}{d}}_{<1}$-contractante sur l'espace de Banach $C^0_1(\mathbb{R})$

donc Ψ admet un unique point fixe $\varphi_0 \in C^0_1(\mathbb{R})$:

mais $\Psi(\varphi_0) = \varphi_0 \iff \Phi(id + \varphi_0) - id = \varphi_0$

$\iff \Phi(H_0) = H_0$, avec $H_0 = id + \varphi_0 \in \mathcal{C}$

donc H_0 est un point fixe (unique) de Φ.

2) $H_0 = id + \varphi_0$, φ_0 1-périodique. On note $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$
$x \mapsto [x]$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\varphi(x+k) = \varphi(x)$ donc φ induit une application $\tilde{\varphi}$ sur $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$\tilde{\varphi}([x]) := \varphi(x), \quad \forall [x] \in \mathbb{T}^1.$$

On pose $h_0 : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$
$[x] \mapsto [x] + \tilde{\varphi}([x]) \mod 1$

Alors $h_0(\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\pi(x)}}) = \pi(\underbrace{x + \varphi(x)}_{H_0(x)})$, $\forall x \in \mathbb{R}$

i.e. $h_0 \circ \pi = \pi \circ H_0$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{R} & \xrightarrow{H_0} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^1 & \xrightarrow[h_0]{} & \mathbb{T}^1 \end{pmatrix}$$

i.e. H_0 relève $h_0 : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$.

(et h_0 est de degré 1 par le fait que $H_0(x+1) = H_0(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

Par construction de H_0, $\Phi(H_0) = H_0$,

i.e. $\frac{1}{d} H_0 \circ F = H_0$

et alors $H_0 \circ F(x) = d\, x\, H_0(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On déduit que $\pi(H_0 \circ F(x)) = \pi(d\, x\, H_0(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$

i.e. $h_0 \circ \underbrace{\pi(F(x))}_{f([x])} = d\, x\, \underbrace{\pi(H_0(x))}_{h_0([x])} \mod 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

i.e. $h_0 \circ f = E_d \circ h_0$,

avec $E_d : \mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{T}^1$

$[x] \longmapsto [dx]$

Autrement dit le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{T}^1 \arrow[d, "h_0"] \\ \mathbb{T}^1 \arrow[r, "E_d"'] & \mathbb{T}^1 \end{tikzcd}$$

De plus h_0 est surjective $\Big(H_0(x+k) = H_0(x) + k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} H_0(x) = \pm\infty$

donc H_0 est surjective par le Thm des valeurs intermédiaires

donc $h_0 : [x] \mapsto \pi_0(H_0(x))$ est surjective $\Big)$

donc h_0 est bien une semi-conjugaison entre f et E_d.