

Systèmes dynamiques, Master I

TD n° 1

UPJV, 2022



Ex. 1 : $f(x) = 3x(1-x)$

$$f^2(x) = 3 f(x) (1 - f(x))$$

$$= 9x(1-x)(1-3x+3x^2)$$

donc $f^2(x) = x \Leftrightarrow x=0$ ou $9(1-x)(1-3x+3x^2) = 1$

↓
2-périodique
mais de période 1

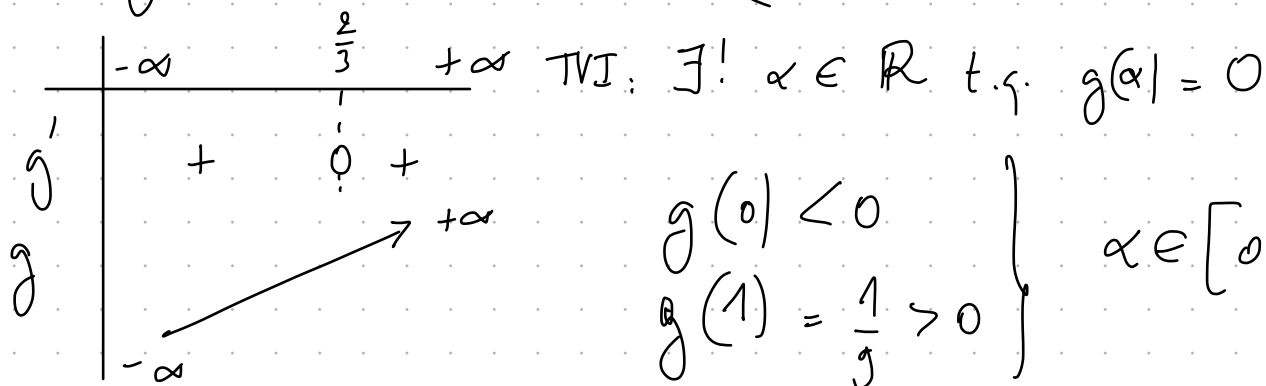
on $f(0)=0$

$$\Leftrightarrow 9(1-3x+3x^2 - x + 3x^2 - 3x^3) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 6x^2 + 4x - \frac{8}{9} = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g(x)}$

$$g'(x) = 9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$$



$$\left. \begin{array}{l} g(0) < 0 \\ g(1) = \frac{1}{9} > 0 \end{array} \right\} \alpha \in [0, 1]$$

α est 2-périodique ; est-il de période 2 ?

Non : en effet il existe $\beta \in]0, 1[$ point fixe pour f
 $(f(\beta) = \beta \Leftrightarrow 3\beta(1-\beta) = \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{3})$

En particulier $\beta \in]0,1[$ est 2-périodique ($f^2(\beta) = f(f(\beta)) = \beta$)
 et par unicité du point 2-périodique dans $]0,1[$
 on conclut $\alpha = \beta$ et donc α est un point fixe $\Rightarrow$

f n'a pas de point de période 2.

Ex. 3

(1) $g(x) = f(x) - x$ C^0 convexe

et les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

$f([a,b]) = [c,d]$,

$c \leq a \leq b \leq d$

$(f([a,b]) \supset [a,b])$

$\exists x_0 \text{ t.q. } f(x_0) = c$
 $\exists x_1 \text{ t.q. } f(x_1) = d$

$g(x_0) = f(x_0) - x_0 = \underbrace{c}_{\leq a} - \underbrace{x_0}_{\geq a} \leq a - a = 0$

$g(x_1) = f(x_1) - x_1 = \underbrace{d}_{\geq b} - \underbrace{x_1}_{\leq b} \geq b - b = 0$

T.V.I.
 $\Rightarrow \exists \alpha$ entre x_0 et x_1 t.q.
 $g(\alpha) = 0$
 donc $f(\alpha) = \alpha$.

(2) $g(a) = \underbrace{f(a)}_{\geq a} - a \geq a - a = 0$
 $g(b) = \underbrace{f(b)}_{\leq b} - b \leq b - b = 0$

T.V.I.
 $\Rightarrow \exists \beta \in [a,b]$ t.q.
 $g(\beta) = 0$,
 i.e. $f(\beta) = \beta$.

Ex. 4

$$f([a, b]) \supset [c, d]$$

$$\Rightarrow \exists J = [a', b'] \subset [a, b] \text{ t.q. } f([a', b']) = [c, d].$$

(voir qu. 1 de l'ex. 6)

$$\text{Ainsi } f^2(J) = f(\underbrace{f(J)}_{[c, d]}) \supset [a, b] \supset J$$

donc par l'ex. 3 question 1, $\exists x \in J$ t.q. $f^2(x) = x$
(f^2 est continue et $f^2(J) \supset J$)

(x est L -périodique $\Rightarrow x$ est de période 1 ou de période 2)

Est-ce que x est de période 2?

$f(x) = x$ n'est pas possible car $x \in J \subset [a, b]$
et $f(x) \in [c, d]$

et $[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$ donc $f(x) \neq x$

Conclusion : x est bien un point de période 2.

Ex. 5

$f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ homéo.

$\Rightarrow f$ est strictement monotone : $\nearrow$ ou $\searrow$ strictement croissante

Supposons $f \nearrow$

Par l'absurde, supposons que $\exists x \in [a, b]$ t.q.

$f^q(x) = x$ pour $q \geq 2$ et $f(x) \neq x$.

① Si $f(x) < x$:

$$f([a, x]) = [f(a), f(x)] \subset [a, x[$$

$$f^2([a, x]) \subset f([a, x]) \subset [a, x[$$

$\vdots$

$$f^q([a, x]) \subset [a, x[$$

$$= [f^q(a), f^q(x)] = [a, x] \leftarrow \text{absurde}$$

f^q est $\nearrow$ car f est $\nearrow$

$f \nearrow$
 $f(a) \geq a$ or si $f(a) > a$ alors $\forall x \in [a, b]$
 $f(x) \geq f(a) > a$
 donc a n'est pas
 dans l'image de f
 absurde car
 $f([a, b]) = [a, b]$.

② si $f(x) > x$:

$$f([x, b]) = [f(x), f(b)] \subset]x, b]$$

$$f^q([x, b]) \subset]x, b]$$

$$[f^q(x), f^q(b)] = [x, b] \leftarrow \text{glande}$$

terminer l'exo. si $f \searrow$

Ex. 9 :

$$E_m : \mathbb{Z}' \rightarrow \mathbb{Z}'$$

$m \geq 1$ entier.

$$x \mapsto mx \pmod{1}$$

$$q \geq 1 : E_m^q(x) = m^q x \pmod{1}$$

$$\text{donc } E_m^q(x) = x \Leftrightarrow m^q x = x \pmod{1}$$

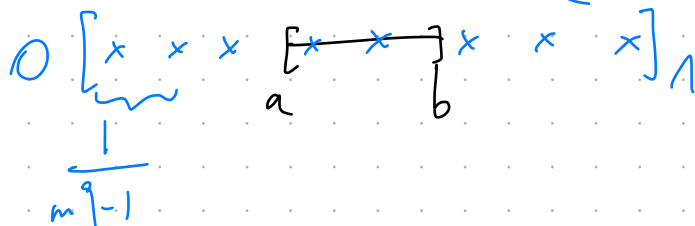
$$\Leftrightarrow (m^q - 1)x = 0 \pmod{1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{p}{m^q - 1}, \quad p = 1, \dots, m^q - 1$$

Les points q -périodiques sont les $x_{p,q} = \frac{p}{m^q - 1}, \quad p = 1, \dots, m^q - 1$.

$$\begin{aligned} & |x_{p+1,q} - x_{p,q}| \\ &= \frac{1}{m^q - 1} \end{aligned}$$

Soit $[a, b] \subset \mathbb{T}^1 \simeq [0, 1[$, $a < b$.
 (on identifie 0 à 1)



$$\begin{aligned} \frac{1}{m^q - 1} < b - a &\Leftrightarrow m^q - 1 > (b - a)^{-1} \\ &\Leftrightarrow q \log m > \log((b - a)^{-1} + 1) \\ &\Leftrightarrow q > \frac{\log(1 + (b - a)^{-1})}{\log m} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad m \geq 2 \end{aligned}$$

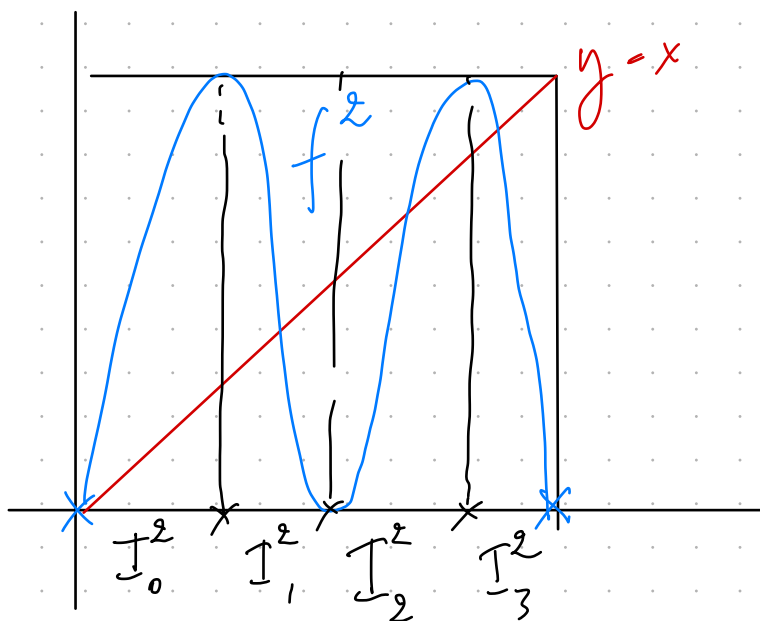
donc pour $q > E\left(\frac{\log(1 + (b - a)^{-1})}{\log m}\right)$

$\exists \propto m$ point q -périodique dans $[a, b]$

donc les points périodiques sont bien denses dans $\mathbb{T}^1$. 

Ex. 7: $x \mapsto \mu x(1-x), \quad \mu \in [0, 4]$.

Ici $\mu = 4 \leadsto f(x) = 4x(1-x)$.

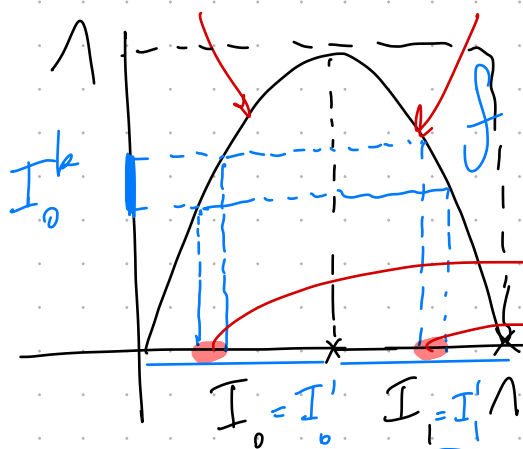


$f^2|_{I_k^2}: I_k^2 \rightarrow [0, 1]$
pour $k = 0, \dots, 3$.

(1) Par récurrence : pour f, f^2 c'est clair ✓

Si c'est vrai pour $k \geq 2$, montrons-le pour f^{k+1} :

↳ H.R. : $\exists I_0^k, \dots, I_{2^k-1}^k$ t.q. $f^k|_{I_j^k}: I_j^k \rightarrow [0, 1]$ bij.



$[0, 1] = I_0 \cup I_1$

$I_0^{k+1} = f^{-1}(I_0^k) \cap I_0$ (intervalle)

$I_1^{k+1} = f^{-1}(I_0^k) \cap I_1$ (intervalle)

$f|_{I_0^{k+1}} = f^k|_{I_0^k}$ (circled) bij. de I_0^{k+1} sur $f(I_0^{k+1}) = f(I_0) \cap I_0^k = I_0^k$
 $[0, 1]$

et $f^k|_{I_0^k}$ est une bij. de I_0^k sur $[0,1]$

$\Rightarrow f^{k+1}|_{I_0^{k+1}}$ est bij. de I_0^{k+1} sur $[0,1]$

Idem, $f^{k+1}|_{I_1^{k+1}}$ est une bijection de I_1^{k+1} sur $[0,1]$.

On procède de même pour les autres intervalles : pour $j \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$

$$\text{on pose } \begin{cases} I_{2^k j}^{k+1} = f^{-1}(I_j^k) \cap I_0 \\ I_{2^k j + 1}^{k+1} = f^{-1}(I_j^k) \cap I_1 \end{cases}$$

et on vérifie que $f^{k+1}|_{I_l^{k+1}}$ est une bij. de I_l^{k+1} sur $[0,1]$,
pour tout $l \in \{0, \dots, 2^{k+1} - 1\}$.

$$(2) \quad I_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Étant donné un mot $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 \dots \tilde{\sigma}_{n-1}$,

on cherche x t.q. $f^k(x) \in I_{\tilde{\sigma}_k}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
(i.e., $x \in f^{-k}(I_{\tilde{\sigma}_k})$)

On procède par récurrence sur $n \geq 1$:

- $n = 1$: clair
- Supposons que c'est vrai pour $n \geq 1$ et soit $\sigma = \sigma_0 \dots \sigma_n$ de longueur $(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence, et comme $\sigma_1 \dots \sigma_n$ est longueur n , il existe y t.q. $y \in I_{\sigma_1} \cap f^{-1}(I_{\sigma_2}) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(I_{\sigma_n})$.

Comme $f|_{I_{\sigma_0}} : I_{\sigma_0} \rightarrow [0,1]$ est une bijection,

il existe $x \in I_{\sigma_0}$ t.q. $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } x &\in I_{\sigma_0} \cap f^{-1}(I_{\sigma_1} \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(I_{\sigma_n})) \\ &= I_{\sigma_0} \cap f^{-1}(I_{\sigma_1}) \cap \dots \cap f^{-n}(I_{\sigma_n}) \end{aligned}$$

Comme souhaité,

C'est à dire $f^k(x) \in I_{\sigma_k}$, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$.

Autre méthode:

montrons qu'il existe un des intervalles I_j^n , $j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$,
t.q. $\forall x \in I_j^n$,

$$x \in I_{\sigma_0} \cap f^{-1}(I_{\sigma_1}) \cap \dots \cap f^{-n}(I_{\sigma_n}).$$

On procède à nouveau par récurrence en n :

si c'est vrai pour $(n-1)$,

(H.R.) $\exists k \in \{0, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ t.q. $\forall y \in I_k^{n-1}$,

$$y \in I_{\sigma_1} \cap f^{-1}(I_{\sigma_2}) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(I_{\sigma_n}).$$

D'après la construction précédente,

$$I_{2k}^n = f^{-1}(I_k^{n-1}) \cap I_0$$

$$I_{2k+1}^n = f^{-1}(I_k^{n-1}) \cap I_1$$

$$\begin{aligned} \leadsto \forall x \in I_{2k}^n, x &\in I_0 \cap f^{-1}(I_{\sigma_1} \cap f^{-1}(I_{\sigma_2}) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(I_{\sigma_n})) \\ &= I_0 \cap f^{-1}(I_{\sigma_1}) \cap \dots \cap f^{-n}(I_{\sigma_n}) \end{aligned}$$

$$\text{et de même, } \forall x \in I_{2k+1}^n, x \in I_1 \cap f^{-1}(I_{\sigma_1}) \cap \dots \cap f^{-n}(I_{\sigma_n})$$

ce qui conclut la récurrence $\blacksquare$

(on prend $j = 2k$ ou $2k+1$ selon que $\sigma_0 = 0$ ou 1 :

$$\text{alors } \forall x \in I_j^n, x \in I_{\sigma_0} \cap \dots \cap f^{-n}(I_{\sigma_n}))$$

- Soit $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1} \in \{0, 1\}^n$ *on a 2^n tels mots.*

$\leadsto \sigma := \sigma_0 \dots \sigma_{n-1}$ est de longueur n .

On a vu que $\exists j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ t.q.

$$\forall x \in I_j^n, \begin{cases} x \in I_{\sigma_0} \\ f(x) \in I_{\sigma_1} \\ \vdots \\ f^{n-1}(x) \in I_{\sigma_{n-1}} \end{cases} \quad \left(I_j^n = I_{\sigma_0} \cap \dots \cap f^{(n-1)} I_{\sigma_{n-1}} \right)$$

De plus, $f^n|_{I_j^n}$ est une bijection de I_j^n sur $[0, 1]$

donc $f^n(I_j^n) \supset I_j^n$: $\exists x_\sigma \in I_j^n$ t.q. $f^n(x_\sigma) = x_\sigma$ *x_σ est n -périodique*

et de plus $x_\sigma \in I_{\sigma_0}, f(x_\sigma) \in I_{\sigma_1}, \dots, f^{n-1}(x_\sigma) \in I_{\sigma_{n-1}}$

donc si $\sigma' = \sigma'_0 \dots \sigma'_n$ est un autre mot de longueur n ,

alors $x_{\sigma'} \neq x_\sigma$.

Conclusion : $\{x_\sigma : \sigma \in \{0, 1\}^n\}$ est un ensemble de points n -périodiques de cardinal 2^n .

Exercice 6: (Théorème de Sarkowski)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un segment, $f: I \rightarrow I$ une application C^0 .

1) Si K est un segment $\subset f(I)$, m.g. $\exists L$ segment $\subset I$ t.q. $K = f(L)$.

2) On suppose qu'il existe n segments $I_0, \dots, I_{n-1} \subset I$ t.q.

$$I_0 \subset f(I_{n-1}) \quad / \quad I_{k+1} \subset f(I_k) \quad \forall k \in \llbracket 0, \dots, n-2 \rrbracket.$$

M.g. $f^n = f \circ \dots \circ f$ a un pt fixe x_0 t.q. $f^k(x_0) \in I_k$
 $\forall k \in \llbracket 0, \dots, n-1 \rrbracket$.

3) Si $x \in I$ vérifie $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ on

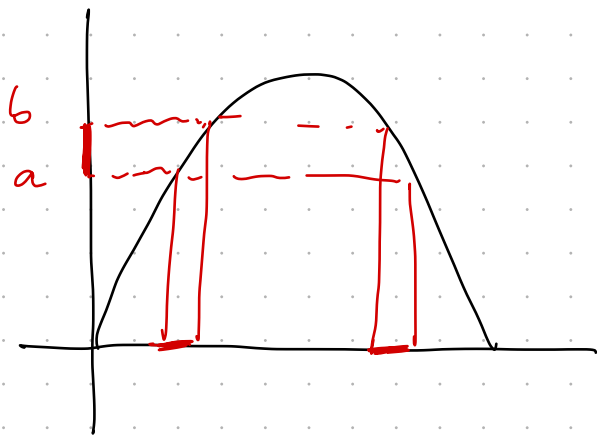
dlt que x est un point n -périodique. M.g. s'il existe un point

3 périodique alors il existe un point n -périodique pour tous $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $K = [a, b]$. $K \subset f(I)$ donc $\exists a_0, b_0 \in I$ t.q.

$$a = f(a_0),$$

$$b = f(b_0).$$



$$a_0 < b_0.$$

Soit $A = \{x \in [a_0, b_0] \text{ t.q. } f(x) = b\}$

C' est un fermé ($\neq \emptyset$ car $b \in A$).

On peut prendre le plus petit élément $\beta \in A$.

$$(f(\beta) = b)$$

On considère l'ensemble $B = \{x \in [a_0, \beta] \text{ t.q. } f(x) = a\}$.

On peut considérer le plus grand élément $\alpha \in B$.

$$(f(\alpha) = a)$$

$f([\alpha, \beta])$ est un segment et on peut vérifier qu'il répond à la question.

2) On suppose qu'il existe n segments $I_0, \dots, I_{n-1} \subset I$ t.q.

$$I_0 \subset f(I_{n-1}) \quad / \quad I_{k+1} \subset f(I_k) \quad \forall k \in \llbracket 0, \dots, n-2 \rrbracket.$$

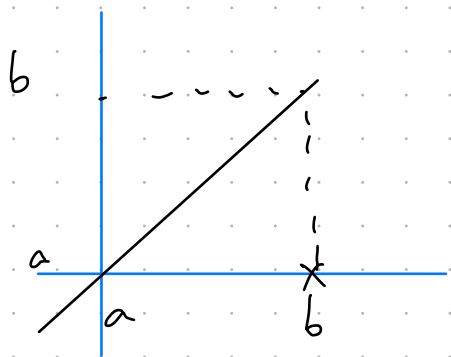
M.q. $f^n = f \circ \dots \circ f$ a un pt fixe x_0 t.q. $f^k(x_0) \in I_k$
 $\forall k \in \llbracket 0, \dots, n-1 \rrbracket.$

2) $n=2$: $I_0 \subset f(I_1)$ et $I_1 \subset f(I_0)$.

$$I_0 \subset f(I_1) \subset f^2(I_0).$$

$I_0 \subset f^2(I_0)$ donc par le thm des valeurs int. on a

un pt fixe } par f^2 dans (I_0) .



$$I_0 = [a, b].$$

$$\begin{pmatrix} f^2 - \text{id} \\ f^2(a) - a \geq 0 \\ f^2(b) - b \leq 0 \end{pmatrix}$$

On $I_1 \subset f(I_0)$ donc par la qn. 1,

$\exists$ segment $J_1 \subset I_0$ t.q. $f(J_1) = I_1$.

$$\text{On a } J_1 \subset I_0 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$$

$$J_1 \subset f^2(J_1)$$

donc par l'argument précédent, $\exists x_0 \in J_1$ point fixe de f^2 .

De plus $f(x_0) \in I_1$
 $\cap$
 $J_1 \subset I_0$

Cas général : on construit $J_{n-1} \subset \dots \subset J_2 \subset J_1 \subset I_0$ t.q.

$$f^k(J_k) = I_k, \quad \forall k \in [1, n-1].$$

($J_{1,2}$ est construit comme au-dessus et alors
 $f(J_1) = f(I_1) \supset I_2$ donc $\exists J_2$ t.q. $f^2(J_2) = I_2$ etc.)

Comme $I_0 \subset f(I_{n-1}) = f^n(J_{n-1})$

donc $\exists J_n \subset J_{n-1}$ t.q. $f^n(J_n) = I_0$.

$f^n(J_n) = I_0 \supset J_n$ donc f^n admet un point fixe z_0 dans J_n .

De plus $f^k(z_0) \in I_n, \forall k \in [1, m-1]$.

3) Si $x \in I$ vérifie $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$ pour $k \in [1, n-1]$ on dit que x est un point n -périodique. Mq. s'il existe un point 3 périodique alors il existe un point n -périodique pour tous $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $a \in I$, $f^3(a) = a$ et $\underbrace{f(a)}_b \neq a$, $\underbrace{f^2(a)}_c \neq a$.

$\Rightarrow a \neq b \neq c$.

Ordonné à partir on suppose $a = \min(a, b, c)$.

• Supposons que $a < b < c$.

On pose $I_0 = [a, b]$, $I_1 = [b, c]$.

$f(I_0) \supset I_1$

$f(I_1) \supset I_0, I_1$

$\left(\begin{array}{l} f(a) = b, f(b) = f^2(a) = c \\ \text{red arrow } I_1 \rightarrow I_0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} f(b) = c, f(c) = f^3(a) = a \\ I_0 \rightarrow I_1, I_1 \rightarrow I_1 \end{array} \right)$

$I_0 \rightarrow I_1 \Rightarrow f$ admet un point fixe dans I_1

$I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$ donc f^2 admet un point fixe x_0 dans I_0
car d'après p. f est dans I_1

$$f^2(x_0) = x_0 \text{ et } f(x_0) \in I_1 \setminus \{b\}$$
$$\text{donc } f(x_0) \neq x_0.$$

$n \geq 4$. On a le cycle $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$
(n-1)

donc f^n admet un point fixe $x_n \in I_0$ f^n

t.q. $f(x_n), f^2(x_n), \dots, f^{n-1}(x_n) \in I_1$.

De même on a $b \neq x_n$ et aussi $f(x_n), \dots, f^{n-1}(x_n) \neq x_n$.

donc x_n est n-périodique.

Si maintenant on a $a < c < b$, on pose $I_0 = [a, c]$
 $I_1 = [c, b]$

$$\leadsto I_1 \rightarrow I_0$$

$$I_0 \rightarrow I_0 \text{ et } I_0 \rightarrow I_1$$

$$I_1 \rightarrow \underbrace{I_0 \rightarrow \dots \rightarrow I_0}_{(h-1)} \rightarrow I_1 \quad \text{produit un fait } n\text{-fermeture.}$$