

Feuille 4 d'exercices

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré (SDM). Si $\mu(X) = 1$, montrer qu'il y a équivalence entre

- (1) $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est ergodique ;
- (2) $\forall A, B \in \mathcal{B}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B) ;$$

- (3) $\forall f, g \in L^2(X, \mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X f \circ T^k \cdot g \, d\mu = \int_X f \, d\mu \cdot \int_X g \, d\mu.$$

Exercice 2 (Mesures ergodiques). Soit X un espace compact, $\mathcal{B}$ la tribu des Boréliens sur X , et $T: X \rightarrow X$ une application continue. On note $\mathcal{M}_T(X)$ l'ensemble des mesures μ de probabilité T -invariantes ($T_*\mu = \mu$). Montrer que les mesures de probabilité ergodiques pour T sont les points extrémaux de $\mathcal{M}_T(X)$, i.e., les mesures $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ t.q.

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T(X), \quad \mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu.$$

Exercice 3 (Unique ergodicité). Soit X un espace compact. Un système dynamique topologique T sur X est *unique-ment ergodique* s'il admet une unique mesure de probabilité invariante, i.e., $\mathcal{M}_T(X) = \{\mu_0\}$ est un singleton.

- (1) Montrer que pour tout $\alpha \notin \mathbb{Q}$, la rotation irrationnelle $r_\alpha: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1, x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$, est uniquement ergodique, et préciser l'unique mesure invariante.
- (2) Montrer qu'un système dynamique discret $T: X \rightarrow X$ sur un espace métrique compact X est uniquement ergodique si et seulement si
 - (a) pour toute fonction $f \in C^0(X)$, pour tout $x \in X$, la suite $(S_n f(x))_{n \geq 0}$ des moyennes de Birkhoff converge vers une limite indépendante de x (rappel : $S_n f := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$) ;
 - (b) pour toute fonction $f \in C^0(X)$, pour tout $x \in X$, la suite $(S_n f(x))_{n \geq 0}$ converge uniformément vers une constante.

Exercice 4.

- (1) Considérons la suite des premiers chiffres 1, 2, 2^2 etc. des puissances $2^n, n \geq 0$. Quelle est la fréquence d'apparition du chiffre 7 dans cette suite ?
- (2) On considère la suite des 9 premiers chiffres des puissances $2^n, n > n_0$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand. Voit-on plus souvent la séquence 123456789 ou 987654321 dans cette suite ?

Exercice 5.

- (1) Expliquer pourquoi la fonction $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ préserve la mesure de Lebesgue, où

$$f: x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x) & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- (2) Expliquer pourquoi la fonction $f: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ préserve la mesure de Lebesgue, où

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}) & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ (2x-1, \frac{y+1}{2}) & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- (3) On suppose que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Montrer que l'application

$$T: \begin{cases} \mathbb{T}^2 & \rightarrow \mathbb{T}^2 \\ ([x], [y]) & \mapsto ([x] + [\alpha], [x] + [y]) \end{cases}$$

préserve la mesure de Lebesgue et que le système associé est ergodique.

Exercice 6 (Lemme de Kac). Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré ergodique, avec $\mu(X) = 1$. On suppose que $A \in \mathcal{B}$ vérifie $\mu(A) > 0$, et pour tout $x \in X$, on définit

$$n_A(x) := \inf\{n \geq 1 : T^n(x) \in A\}.$$

- (1) Expliquer pourquoi on a $n_A(x) < +\infty$ pour presque tout $x \in X$.
- (2) Pour tout $n \geq 1$, on définit

$$A_n := \{x \in A : n_A(x) = n\}, \quad B_n := \{x \notin A : n_A(x) = n\}.$$

Montrer que

$$\mu(B_n) = \mu(A_{n+1}) + \mu(B_{n+1}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

- (3) En déduire que $\int_A n_A d\mu = 1$. Quelle est la valeur moyenne de n_A sur A ?

Exercice 7. Pour tout $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, on note

$$[0, a_0(x), a_1(x), \dots] := \frac{1}{a_0(x) + \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \dots}}}$$

le développement en fraction continue de x . On a $a_n(x) = a(G^{n-1}(x))$, où $a: x \mapsto [\frac{1}{x}]$, et $G(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$ est l'application de Gauss. On note Leb la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

- (1) Montrer que la mesure μ est invariante par G , où

$$d\mu(x) = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+x} d\text{Leb}.$$

- (2) Montrer que l'application de Gauss G est ergodique pour la mesure μ .