Feuille 2 d'exercices

Exercice 1. Déterminer, suivant les valeurs de $x_0 \in \mathbb{R}$, les ensembles $\omega(x_0)/\alpha(x_0)$ pour l'application

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3.$$

Exercice 2. Soit $T\colon X \to X$ une transformation continue d'un espace de Baire (toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense) séparable (il existe une base dénombrable d'ouverts que l'on notera $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$). On veut montrer l'équivalence entre

— T est positivement transitif, i.e., pour tous ouverts U, V, il existe $n \geq 0$ tel que $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$;
— il existe $x \in X$ tel que $\omega(x) = X$.

(1) Montrer le sens facile.

(2) (a) Soit $x \in X$. Montrer que $\omega(x) = X$ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, l'orbite positive de $T^m(x)$ rencontre chacun des ouverts U_i. En déduire que l'ensemble des tels points x est une intersection dénombrable d'ouverts notés $O_{i,m}$.

(b) Montrer que lorsque T est positivement transitif, chacun des ouverts $O_{i,m}$ est dense dans X. Conclure.

Exercice 3.

(1) Soit P un polynôme complexe ; on dit que z est un point critique de P si $P'(z) = 0$. Si $A\colon z \mapsto az + b$ est une application affine, montrer que $A(z_0)$ est un point critique du polynôme conjugué $A \circ P \circ A^{-1}$ si z_0 est critique pour P.

(2) Montrer que tout polynome complexe de degré deux est conjugué, via une application affine, à un unique polynôme de la forme $z^2 + c$ (on pourra commencer par ramener le point critique en 0 en conjuguant par une translation).

Exercice 4. Soit $T\colon X \to X$ une application définie sur un ensemble X. On dit que $x \in X$ est prépériodique si x n'est pas périodique et s'il existe des entiers $m > n > 0$ tels que $T^m(x) = T^n(x)$.

(1) Donner un exemple d'application ayant un point prépériodique. Peut-on trouver un exemple bijectif ?

(2) Montrer que si X est fini, alors tout point est périodique ou prépériodique. Montrer également qu'il existe des points périodiques.

(3) On suppose que X est un espace métrique et que T est un homéomorphisme. On souhaite montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\text{(i) } x \text{ est périodique} \quad \text{(ii) } \mathcal{O}(x) \text{ est compacte.}$$

(a) Montrer que (i) implique (ii).

(b) Pour l'implication réciproque, montrer qu'un compact dénombrable admet toujours un point isolé et en déduire que tous les points de $\mathcal{O}(x)$ sont isolés. Conclure.

(c) On suppose que X est un espace métrique et que T est continue. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\text{(i) } x \text{ est périodique ou prépériodique} \quad \text{(ii) } \mathcal{O}^+(x) \text{ est compacte.}$$

Exercice 5. Montrer que si X est un espace métrique compact et si $T\colon X \to X$ est une application continue, alors pour tout $x \in X$, on a $T(\omega(x)) = \omega(x)$.

Exercice 6. *Soit (X, d) un espace métrique et $T\colon X \to X$ une application continue. On dit que $x \in X$ est récurrent par chaînes si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n \geq 1$ et une suite finie $(x_k)_{0\leq k\leq n}$ vérifiant*

— *$x_0 = x_n = x$;*
— *pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a $d(x_{k+1}, T(x_k)) < \varepsilon$.*

(1) Montrer que tout point non errant est récurrent par chaînes. La réciproque est-elle vraie ?

(2) Dans le cas où X est compact, montrer que l'ensemble $Rec_{ch}(T)$ des points récurrents par chaînes est positivement invariant.

Exercice 7. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Montrer qu'aucun homéomorphisme croissant $f\colon I \to I$ n'est topologiquement transitif.

Exercice 8. Soit $m > 1$ un entier. On considère l'application $f_m\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ définie par $f_m\colon z \mapsto z^m$. Montrer que $E_m\colon x \mapsto mx \mod 1$ et f_m sont topologiquement conjuguées.

Exercice 9. On va démontrer que toute application continue surjective $T\colon X \to X$ sur un espace topologique séparé admet une extension naturelle $\tilde{T}\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ qui est un homéomorphisme. On munit l'espace produit $X^{-\mathbb{N}}$ (ensemble des suites à valeurs dans X indexées par les entiers relatifs négatifs) de la topologie produit et on considère l'application

$$\hat{T}\colon X^{-\mathbb{N}} \to X^{-\mathbb{N}}, \quad (x_k)_{k\leq 0} \mapsto (T(x_k))_{k\leq 0}.$$

Montrer que $\hat{T}$ est continue et que l'ensemble

$$\tilde{X} = \{\tilde{x} = (x_k)_{k\leq 0} \in X^{-\mathbb{N}} : k < 0 \Rightarrow x_{k+1} = T(x_k)\}$$

est une partie fermée de $X^{-\mathbb{N}}$ positivement invariante par $\hat{T}$, que la restriction $\tilde{T}$ de $\hat{T}$ à $\tilde{X}$ est un homéomorphisme, et que T est un facteur de $\tilde{T}$.

Exercice 10. *Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Soit $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue vérifiant*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad F(x+k) = F(x) + kd. \tag{1}$$

La fonction F induit donc une fonction continue $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ définie par

$$f(\pi(x)) = \pi(F(x))$$

La condition (1) se lit "f est de degré d", et cette condition est vraie pour tout relèvement de f puisqu'ils diffèrent tous d'un entier. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad H(x+1) = H(x) + 1.$$

On définit l'application Φ par : pour tout $H \in \mathcal{E}$,

$$\Phi(H)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{d} H(F(x)).$$

(1) Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par Φ, puis que $\Phi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ a un unique point fixe, noté H_0.

(2) Expliquer pourquoi H_0 relève une application continue $h_0\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ de degré 1, puis prouver que h_0 est une semi-conjugaison entre f et l'endomorphisme linéaire $E_d\colon x \mapsto dx \mod 1$.