Feuille 1 d'exercices

Exercice 1. Dire si l'application logistique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x(1-x)$ a des points périodiques de période 2.

Exercice 2. Dire si l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$ a des points périodiques de période 5.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a \leq b \in \mathbb{R}$. Montrer que :

(1) si $[a, b] \subset f([a, b])$, alors f a un point fixe dans $[a, b]$.

(2) si $[a, b] \supset f([a, b])$, alors f a un point fixe dans $[a, b]$.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient $[a, b]$, $[c, d] \subset \mathbb{R}$ des intervalles tels que

$$[c, d] \subset f([a, b]), \quad [a, b] \subset f([c, d]), \quad \text{et} \quad [a, b] \cap [c, d] = \emptyset.$$

Montrer que f a un point périodique de période 2.

Exercice 5. Montrer que si $f\colon [a, b] \to [a, b]$ est un homéomorphisme alors f n'a pas de point périodique de période supérieure à 2.

Exercice 6 (Théorème de Sarkowski)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un segment, $f\colon I \to I$ une application continue.

(1) Si K est un segment inclus dans $f(I)$, montrer qu'il existe un segment $L \subset I$ tel que $K = f(L)$.

(2) On suppose qu'il existe $n \geq 1$ segments $I_0, \ldots, I_{n-1} \subset I$ tels que

$$I_0 \subset f(I_{n-1}) \quad \& \quad I_{k+1} \subset f(I_k), \quad \forall\, k \in \{0, \ldots, n-2\}.$$

Montrer qu'alors $f^n = f \circ \cdots \circ f$ a un point fixe x_0 tel que

$$f^k(x_0) \in I_k, \quad \forall\, k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

(3) ("Période 3 $\Longrightarrow$ chaos") Si $x \in I$ vérifie $f^n(x) = x$, et $f^k(x) \neq x$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on dit que x est un point périodique de période n. Montrer que si f a un point périodique de période 3, alors il existe un point périodique de période n, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7. On considère l'application logistique $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $x \mapsto 4x(1-x)$.

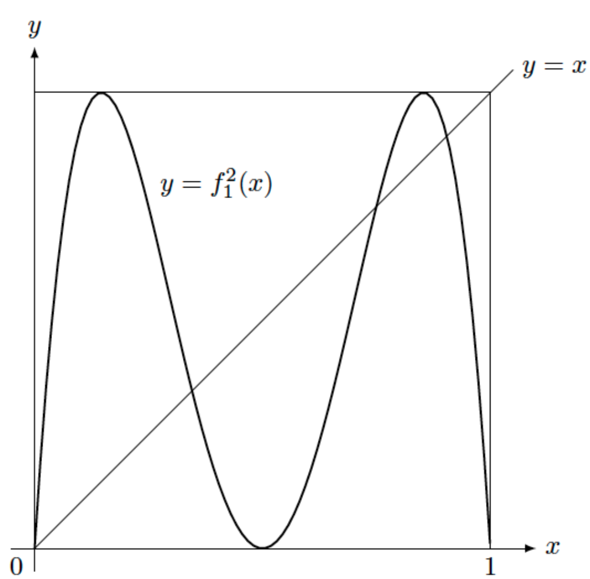

Figure 1. Graphe de l'application $f^2 = f \circ f$.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe 2^n intervalles fermés d'intérieurs disjoints sur chacun desquels f^n est une application strictement monotone d'image $[0, 1]$.

(2) Posons $I_0 := [0, \frac{1}{2}]$ et $I_1 := [\frac{1}{2}, 1]$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute suite $\sigma_0 \ldots \sigma_{n-1}$ avec $\sigma_j = 0$ ou 1 pour $0 \leq j < n$, il existe $x \in [0, 1]$ vérifiant $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \in I_k$ pour tout $0 \leq k < n$. Conclure à l'existence d'au moins 2^n points n-périodiques. *Indication :* le point $\frac{1}{2}$ n'est pas périodique.

Exercice 8. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1, and soit x un point fixe pour f. Montrer que si $|f'(x)| < 1$, alors le point x est attractif, et si $|f'(x)| > 1$, alors p est répulsif.

Exercice 9. Montrer que l'ensemble des points périodiques pour l'application dilatante $E_m\colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ est dense dans $\mathbb{T}^1$.

Exercice 10. Soit $\mathbb{S}^1 := \{e^{2\pi i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$. Pour chaque $q \in \mathbb{N}$, déterminer le nombre de points q-périodiques pour l'application $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \to z^2$.

Exercice 11. Montrer que le nombre de points périodiques de période $p = q^r$ pour l'application dilatante E_m, avec $q \in \mathbb{N}$ premier et $r \in \mathbb{N}$, est donné par

$$N_m(p) = m^p - m^{\frac{p}{q}}.$$

Exercice 12. Déterminer le plus petit ensemble E_3-invariant qui contient la réunion $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

Exercice 13. Pour une application $f\colon X \to X$, montrer que

(1) $A \subset X$ est f-invariant si et seulement si $f^{-1}(A) \subset A$ et $f(A) \subset A$;

(2) $A \subset X$ est f-invariant si et seulement si $X \setminus A$ est f-invariant.

Exercice 14. Montrer que si l'ensemble X est une section de Poincaré pour un semi-flot $(\Phi^t)_{t\geq 0}$, alors

(1) $(\Phi^t)_{t\geq 0}$ n'a pas de point fixe dans X ;

(2) si $(\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un flot, l'application de Poincaré f induite par $(\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur X est inversible.

Exercice 15. Soit $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ le tore de dimension deux. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit le flot $\Phi_\alpha = (\Phi_\alpha^t)_{t\in\mathbb{R}}$ par

$$\Phi_\alpha^t\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, \quad (x, y) \to (x + \alpha t, y + t) \bmod 1.$$

(1) Déterminer l'application de Poincaré induite par Φ_α sur $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ et montrer que Φ_α est un flot de suspension au-dessus d'une application qu'on précisera.

(2) Montrer que si α est irrationnel, alors toute orbite de Φ_α est dense dans $\mathbb{T}^2$, et que si α est rationnel, alors toute orbite de Φ_α est périodique.

Exercice 16. Soit $(\Phi^t)_{t\geq 0}$ la suspension d'un homéomorphisme $f\colon X \to X$ par une fonction toit $\tau\colon X \to \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'un orbite périodique de $(\Phi^t)_{t\geq 0}$ correspond à une orbite périodique de f, et qu'une orbite dense de $(\Phi^t)_{t\geq 0}$ correspond à une orbite dense de f.

Exercice 17. Soit $d \geq 1$ un entier. Soit $A \in M(d, \mathbb{C})$ une matrice $d \times d$ à coefficients complexes. Soit $\Phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ défini par $\Phi\colon (t, x) \mapsto \exp(tA)x$, où $\exp(B) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!}$ est l'exponentielle d'une matrice. Montrer que Φ est le flot engendré par le champ de vecteurs $x \mapsto Ax$ sur $\mathbb{C}^d$.