Université de Picardie Jules Verne — 2021-2022
UFR des Sciences — M1, Systèmes Dynamiques.

Examen de Systèmes Dynamiques

Exercice 1 Soit $f\colon I \to I$ une application continue d'un intervalle $I = [a, b]$, $a \leq b \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que pour un entier $n \geq 1$, il existe n intervalles $I_0, \ldots, I_{n-1}$, avec $I_k = [a_k, b_k] \subset I$, pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, tels que

$$\forall\, k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad f(I_k) \supset I_{k+1}, \quad \text{où l'on note } I_n := I_0.$$

   (a) Montrer qu'il existe n intervalles fermés $J_0 \supset J_1 \supset \cdots \supset J_{n-1}$ tels que

$$J_0 \subset I_0 \quad \text{et} \quad f^{k+1}(J_k) = I_{k+1}, \quad \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

   (b) En déduire qu'il existe $x \in I_0$ tel que $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \in I_k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

   (c) Montrer que si les intervalles $(I_k)_{k=0}^{n-1}$ sont deux à deux disjoints, alors f admet un point périodique de période n.

2. On suppose que l'application f a un point périodique $x_1 \in I$ de période 3.

   (a) On note $x_2 := f(x_1)$, $x_3 := f(x_2)$. On suppose que $x_1 < x_2 < x_3$. En considérant les intervalles $I_1 := [x_1, x_2]$, $I_2 := [x_2, x_3]$, montrer que pour tout $q \geq 2$, il existe un point q-périodique $x \in I_1$.

   (b) En déduire que pour tout entier $q \geq 2$, l'application f a un point périodique de période q.

Exercice 2 Soit X un espace topologique compact.

1. Montrer qu'un homéomorphisme de X est minimal si et seulement s'il est positivement minimal.
2. Montrer qu'une application continue $T\colon X \to X$ est positivement minimale si et seulement si, pour toute partie ouverte $U \neq \emptyset$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que

$$\bigcup_{k=0}^{n} T^{-k}(U) = X.$$

Exercice 3 *On fixe un entier $d \geq 2$. Soit $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 vérifiant*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) > 1, \quad \textit{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad F(x+k) = F(x) + kd.$$

En particulier, F induit une application $f\colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ de degré d définie par $f \circ \pi = \pi \circ F$, avec $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$. On note $\mathcal{E}'$ l'ensemble des applications $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, croissantes, et telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad H(x+1) = H(x) + 1.$$

Soit $\widetilde{E}_d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto dx$. On définit l'application Ψ par : pour tout $H \in \mathcal{E}'$,

$$\Psi(H) := F^{-1} \circ H \circ \widetilde{E}_d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

1. *Montrer que $\mathcal{E}'$ est stable par Ψ, puis que $\Psi\colon \mathcal{E}' \to \mathcal{E}'$ a un unique point fixe, noté H_1.*
2. *Montrer que H_1 est injective et relève un homéomorphisme $h_1\colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ de degré 1.*
3. *En déduire que f est conjugué à l'endomorphisme linéaire $E_d\colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$, $x \mapsto dx \mod 1$.*

Exercice 4 Soit $T\colon X \to X$ une application continue sur un espace métrique X. On rappelle qu'un point $x \in X$ est *prépériodique* si x n'est pas périodique et s'il existe des entiers $m > n > 0$ tels que $T^m(x) = T^n(x)$. Pour tout point $x \in X$, on note $\mathcal{O}^+(x) := \{T^k(x) : k \geq 0\}$ l'orbite positive de x.

1. Montrer qu'un compact dénombrable admet toujours un point isolé.
2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) x est périodique ou prépériodique (b) $\mathcal{O}^+(x)$ est compacte.

Exercice 5 Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un segment.

1. Montrer que si $f\colon I \to I$ est un homéomorphisme alors f n'a pas de point périodique de période supérieure à 2.
2. Montrer qu'aucun homéomorphisme croissant $f\colon I \to I$ n'est topologiquement transitif.

Exercice 6 Soit $m > 1$ un entier. On considère l'application $f_m\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ définie par $f_m\colon z \mapsto z^m$.

1. Montrer que $E_m\colon x \mapsto mx \mod 1$ et f_m sont topologiquement conjuguées.
2. Soit $q \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de points q-périodiques de l'application $f_2\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \to z^2$.

Exercice 7 Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme positivement minimal de $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$. Par l'absurde, on suppose que $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est un tel homéomorphisme. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne, et on définit les boules $B := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| < 1\}$, $\overline{B} := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| \leq 1\}$.

1. Justifier que pour tout point $x \in \overline{B}$, l'ensemble $I(x) := \{n \geq 1 : f^n(x) \in B\}$ est non-vide.
2. Pour tout $x \in \overline{B}$, on note $n(x) := \min I(x)$. Prouver que $\overline{B} \ni x \mapsto n(x) \in \mathbb{N}$ est bornée.
3. Construire un ensemble borné positivement invariant.
4. Conclure.

Exercice 8 On note $\mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des homéomorphismes F de $\mathbb{R}$ qui commutent avec la translation $T_1\colon x \mapsto x+1$ (i.e., tels que $F \circ T_1 = T_1 \circ F$).

1. Soit $F \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ un homéomorphisme de nombre de rotation $\rho(F) \notin \mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ et des entiers $q \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}$ tels que $x - \varepsilon < F^q(x) - p < x$.
2. En déduire que si $F, G \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ sont tels que $F(x) < G(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\rho(F) = \rho(G)$, alors $\rho(F) \in \mathbb{Q}$.

Exercice 9 Montrer que si $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ et $g \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ commutent et ont chacun un point fixe, alors $f \circ g$ a également un point fixe, en montrant que les relevés commutent.

Exercice 10 Soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur $\mathbb{T}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et μ la mesure de Lebesgue. Pour $[\alpha] \in \mathbb{T}^1$, on considère le système dynamique mesuré $(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \mu, r_\alpha)$ associé à la rotation $r_\alpha\colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$, $[x] \mapsto [x+\alpha]$. Montrer que $(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \mu, r_\alpha)$ est ergodique **si et seulement si** $[\alpha] \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
Indication : on pourra considérer le développement en série de Fourier d'une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mu)$ invariante par r_α.