Université de Picardie Jules Verne 2020-2021
UFR des Sciences M1, Systèmes Dynamiques.

Examen de Systèmes Dynamiques (3h)

Il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir une très bonne note. On portera un soin particulier à la précision de la rédaction.

Exercice 1 Soit $T\colon X \to X$ une application continue sur un espace métrique X. On rappelle qu'un point $x \in X$ est *prépériodique* si x n'est pas périodique et s'il existe des entiers $m > n > 0$ tels que $T^m(x) = T^n(x)$. Pour tout point $x \in X$, on note $\mathcal{O}^+(x) := \{T^k(x) : k \geq 0\}$ l'orbite positive de x.

1. Montrer qu'un compact dénombrable admet toujours un point isolé.
   Indication : penser à la propriété de Baire.
2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   (a) x est périodique ou prépériodique (b) $\mathcal{O}^+(x)$ est compacte.

Exercice 2 Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme *positivement minimal* de $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$. Par l'absurde, on suppose que $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est un tel homéomorphisme. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne, et on définit les boules $B := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| < 1\}$, $\overline{B} := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| \leq 1\}$.

1. Justifier que pour tout point $x \in \overline{B}$, l'ensemble $I(x) := \{n \geq 1 : f^n(x) \in B\}$ est non-vide.
2. Pour tout $x \in \overline{B}$, on note $n(x) := \min I(x)$. Prouver que $\overline{B} \ni x \mapsto n(x) \in \mathbb{N}$ est bornée.
3. Construire un ensemble borné positivement invariant.
4. Conclure.

Exercice 3 On note $\mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des homéomorphismes F de $\mathbb{R}$ qui commutent avec la translation $T_1\colon x \mapsto x+1$ (i.e., tels que $F \circ T_1 = T_1 \circ F$).

1. Soit $F \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ un homéomorphisme de nombre de rotation $\rho(F) \notin \mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ et des entiers $q \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}$ tels que $x - \varepsilon < F^q(x) - p < x$.
2. En déduire que si $F, G \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ sont tels que $F(x) < G(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\rho(F) = \rho(G)$, alors $\rho(F) \in \mathbb{Q}$.
3. On fixe $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit l'application $F_t\colon x \mapsto x + \alpha\sin(2\pi x) + t$ et l'homéomorphisme $f_t \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ admettant F_t comme relèvement. Nous avons vu que chaque f_t a un nombre fini de points périodiques.
   (a) Montrer que l'application $r\colon t \mapsto \rho(F_t)$ est continue, croissante, et vérifie $r(\cdot + 1) = r(\cdot) + 1$.
   (b) Montrer que chaque $r^{-1}(\{a\})$ est un intervalle non trivial si $a \in \mathbb{Q}$ et réduit à un point si $a \notin \mathbb{Q}$.
   (c) En déduire que r est un *escalier du diable* au sens où r est continue, croissante sur $[0,1]$, avec $r(0) < r(1)$, et dérivable de dérivée nulle sur un ensemble dense dans $[0,1]$ dont le complémentaire est un *ensemble de Cantor* de $[0,1]$ (i.e., un sous-ensemble compact de $[0,1]$, sans point isolé, totalement discontinu).

Exercice 4 Soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur $\mathbb{T}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et μ la mesure de Lebesgue. Pour $[\alpha] \in \mathbb{T}^1$, on considère le système dynamique mesuré $(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \mu, r_{[\alpha]})$ associé à la rotation $r_{[\alpha]}\colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$, $[x] \mapsto [x+\alpha]$.

1. Montrer que $(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \mu, r_{[\alpha]})$ est *ergodique* **si et seulement si** $[\alpha] \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
   Indication : on pourra considérer le développement en série de Fourier d'une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mu)$ invariante par $r_{[\alpha]}$.
2. Un système dynamique mesuré $(X_0, \mathcal{B}_0, \mu_0, T_0)$ avec $\mu_0(X_0) = 1$ est dit *mélangeant* si pour toutes fonctions $f, g \in \mathrm{L}^2(\mu_0)$, on a
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_{X_0} f(x) g(T_0^n(x))\, d\mu_0(x) = \int_{X_0} f(x)\, d\mu_0(x) \int_{X_0} g(x)\, d\mu_0(x).$$
   Montrer que pour tout $[\alpha] \in \mathbb{T}^1$, le système dynamique mesuré $(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \mu, r_{[\alpha]})$ n'est pas mélangeant.