Université de Picardie Jules Verne 2022-2023
UFR des Sciences L3S6 Probabilités.

Partiel de probabilités (2h)

Jeudi 02/03/23, 14h-16h

Exercice 1 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X\colon \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire entière, avec $\mathbb{E}(X) < +\infty$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).$$

Exercice 2 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac au point a définie sur la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de la manière suivante : pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(B) = 1$ si $a \in B$, et $\delta_a(B) = 0$ sinon.
Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. On pose $P := \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta_{a_k}$.

1. Vérifier que $P = \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta_{a_k}$ est une mesure de probabilité sur la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un borélien. Calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B \, dP$.
3. En déduire l'intégrale $\mathbb{E}(f) = \int_{\mathbb{R}} f \, dP$ d'une fonction mesurable positive $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ quelconque.
4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. Vérifier que $\mathbb{E}(f) = \int_{\mathbb{R}} f \, dP$ existe, et montrer que si f prend ses valeurs dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}(f) \in I$.

Exercice 3 Soit $(\varepsilon_n)_n \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres dans $(0,1)$. On définit une suite de sous-ensembles $(K_n)_{n\geq 0}$ de $[0,1]$ de la façon suivante : on pose $K_0 := [0,1]$, et pour tout $n \geq 0$, en notant $K_n = \sqcup_{k=1}^{\ell(n)} I_n^k$, avec $\ell(n) \in \mathbb{N}$ et $I_n^k = [a_n^k, b_n^k]$, $\forall\, k \in \{1, \cdots, \ell(n)\}$, soit $K_{n+1} \subset K_n$ le sous-ensemble obtenu à partir de K_n en retirant de chaque intervalle $I_n^k = [a_n^k, b_n^k]$ l'intervalle ouvert J_n^k de centre $\frac{a_n^k + b_n^k}{2}$ et de longueur $\lambda(J_n^k) = (1 - \varepsilon_n)\lambda(I_n^k)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. On pose $K := \lim_{n\to+\infty} K_n$.

1. Pour tout $n \geq 0$, calculer le nombre $\ell(n)$ d'intervalles composant K_n. Montrer que pour tout $n \geq 0$, K_n appartient à la tribu borélienne $\mathcal{B}([0,1])$, puis que $K \in \mathcal{B}([0,1])$.
2. Pour tout $n \geq 0$, calculer la mesure de Lebesgue $\lambda(K_{n+1})$ de K_{n+1} en fonction de celle de K_n. En déduire l'expression de $\lambda(K_n)$ pour tout $n \geq 0$ en fonction des termes de $(\varepsilon_m)_m$.
3. On suppose que $-\sum_{n=0}^{+\infty} \log \varepsilon_n = +\infty$. Calculer la mesure de Lebesgue $\lambda(K)$ de K.
4. On suppose à présent que $-\sum_{n=0}^{+\infty} \log \varepsilon_n = a \neq +\infty$. Calculer la mesure de Lebesgue $\lambda(K)$ de K.

Exercice 4 Montrer qu'il n'existe pas de mesure **de probabilité** P sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translation, i.e., telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(T_a)_* P = P$, où $T_a\colon x \mapsto x + a$, et $(T_a)_* P\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto P(T_a^{-1}(B))$.

Exercice 5 On étudie l'évolution d'une population au cours du temps. On modélise cela à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et d'une suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires, où $Z_n\colon \Omega \to \mathbb{N}$ représente le nombre d'individus de la n-ème génération. On suppose que $Z_0 = 1$. Pour tout $n \geq 0$, chaque individu $i \in \{1, \cdots, Z_n\}$ de la n-ème génération engendre un nombre aléatoire d'enfants, décrit par une variable aléatoire $X_n^i\colon \Omega \to \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq 0$, on suppose que les $(X_n^i)_{1\leq i\leq Z_n}$ sont indépendantes, ont même loi (correspondant à une mesure de probabilité Q sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$), avec $\alpha := \mathbb{E}(X_i^n) < +\infty$, et que les $(X_n^i)_{1\leq i\leq Z_n}$ sont indépendantes de Z_n.

1. Pour tout $n \geq 0$, donner une formule exprimant Z_{n+1} en fonction de Z_n et des $(X_n^i)_{1\leq i\leq Z_n}$.
2. Pour tout $n \geq 0$, on note g_n la fonction génératrice de Z_n. À l'aide de la question 1., montrer que
$$g_{n+1} = g_n \circ g, \quad \forall\, n \geq 0,$$
où g est la fonction génératrice de la loi Q commune aux $(X_n^i)_{1\leq i\leq Z_n}$.
3. Pour tout $n \geq 0$, en déduire l'expression de g_n en fonction de g et n.
4. Pour tout $n \geq 0$, montrer que g_n est dérivable en 1, et calculer $g_n'(1)$ en fonction de $g'(1)$ et n.
5. En déduire que Z_n est intégrable pour tout $n \geq 0$, et donner l'expression de $\mathbb{E}(Z_n)$ en fonction de $\alpha = \mathbb{E}(X_i^n)$ et n.
6. Pour $n \geq 0$, on pose $A_n := \{Z_n \neq 0\}$. Montrer que la suite $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est décroissante et que
$$P(A_n) = P(Z_n \neq 0) \leq \alpha^n, \quad \forall\, n \geq 0.$$
7. À l'aide du lemme de Borel-Cantelli, montrer que si $\alpha = \mathbb{E}(X_i^n) \in [0,1)$, alors avec probabilité un, la population s'éteint en temps fini, i.e., il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Z_n = 0$ pour $n \geq n_0$.