Université de Picardie Jules Verne 2020-2021
UFR des Sciences L3S6 Probabilités.

Partiel de probabilités (2 heures)

Mercredi 10/03/21, 10h-12h

Dans tous les exercices, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel les variables aléatoires sont définies. On rappelle que "v.a.r." signifie "variable aléatoire réelle".

Exercice 1 On joue à "Pile" ou "Face" avec une pièce. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la variable aléatoire $X_n : \Omega \to \{0, 1\}$ qui vaut 1 si l'on obtient "Pile" au n-ème lancer et 0 si l'on obtient "Face" au n-ème lancer. On suppose que pour un certain $p \in]0, 1[$, on a

$$P(X_n = 0) = p, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit l'événement $A_n := \{X_{n+1} \neq X_n\}$.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $P(A_n)$.
2. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $P(A_n \cap A_{n+1})$.
3. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto f(x) := 4x(1 - x)$. Monter que $f(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in [0, 1]$, et que $f(x) = 1$ si et seulement si $x = \frac{1}{2}$.
4. Les événements A_n et A_{n+1} sont-ils indépendants ? Discuter selon les valeurs de p.
5. Pour tous entiers $n \geq 1$ et $k \geq 2$, calculer $P(A_{n+k}|A_n)$. Les événements A_n et A_{n+k} sont-ils indépendants ?
6. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires $T_n : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, avec $T_0(\omega) = 0$, pour tout $\omega \in \Omega$, et pour $n \geq 1$,

$$T_n : \omega \mapsto \begin{cases} +\infty, & \text{si} \quad T_{n-1}(\omega) = +\infty \quad \text{ou} \quad \{k > T_{n-1}(\omega) : X_{k+1}(\omega) \neq X_k(\omega)\} = \emptyset, \\ \inf\{k > T_{n-1}(\omega) : X_{k+1}(\omega) \neq X_k(\omega)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer $P(\{T_1 > k\})$, et en déduire que $P(\{T_1 \neq +\infty\}) = 1$.
   (b) Montrer que $\limsup_k A_{2k} \subset \bigcap_{n\geq 0}\{T_n \neq +\infty\}$.
   (c) En déduire qu'avec probabilité 1, $T_n < +\infty$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 2 Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r. de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, $P(X \geq -a) = 1 - \frac{1}{2}P(|X| > a)$.
2. En déduire que pour tout $a > 0$,

$$\int_{-a}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \geq \sqrt{2\pi}\Big(1 - \frac{1}{2a^2}\Big).$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que la v.a.r. $e^{\lambda X}$ est intégrable, et calculer son espérance $E(e^{\lambda X})$.

Exercice 3 Soit $\rho > 0$, et soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$ le disque de centre $(0, 0)$ et rayon $\rho > 0$. On considère un couple $Z = (X, Y)$ de v.a.r. à valeurs dans D et de loi uniforme, i.e., de densité

$$f_Z : (x, y) \mapsto \frac{1}{\pi\rho^2}\mathbb{1}_D(x, y).$$

1. Déterminer les densités marginales f_X et f_Y.
2. Calculer les espérances de X et Y.
3. On considère un jeu de fléchettes. On représente la cible par le disque D ; un lancer est décrit par le vecteur aléatoire $Z = (X, Y)$, où X, Y correspondent aux coordonnées du point d'impact de la fléchette. On suppose que le score obtenu correspond à la v.a.r. $S := \rho - \sqrt{X^2 + Y^2}$.
   Déterminer la loi de S (on pourra considérer $E(h(S))$ pour $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée).

Exercice 4 Soit $p \in [0, 1]$.

1. Calculer la fonction caractéristique ϕ_X d'une v.a.r. X de loi de Bernoulli de paramètre p.
2. On se donne $n \geq 1$ v.a.r. indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de loi de Bernoulli de paramètre p. Calculer la fonction caractéristique ϕ_S de leur somme $S := X_1 + \cdots + X_n$. Quelle est la loi de S ?