Université de Picardie Jules Verne — 2021-2022
UFR des Sciences — L3S6 Probabilités.

Examen de probabilités

13/05/22, 13h30-15h30

Le sujet comporte deux pages, et trois exercices. Dans tous les exercices, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel les variables aléatoires sont définies. On rappelle que "v.a.(r.)" signifie "variable aléatoire (réelle)" et que "p.s." signifie "presque sûrement". On rappelle que pour une v.a.r. X, et pour un réel $t \in \mathbb{R}$, on utilise la notation abrégée $\{X \geq t\}$ pour désigner l'événement $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq t\}$.

Exercice 1 ($\sim$ 5 pts) Soit $\lambda > 0$. On considère une population de $n \geq 1$ individus ayant souscrit une assurance automobile ; pour $1 \leq k \leq n$, la probabilité que l'individu k ait un accident est égale à $p_n = \frac{\lambda}{n}$, indépendamment de ce qui arrive aux autres assurés. On introduit des v.a.r. $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p_n, où $X_k = 1$ si l'individu k a un accident, et $X_k = 0$ sinon. Soit $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ la v.a.r. représentant le nombre total de personnes que l'assurance devra indemniser.

1. Donner la loi et la fonction caractéristique ϕ_n de S_n.
2. Soit Y une v.a.r. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$. Calculer la fonction caractéristique ϕ_Y de Y.
3. Montrer que la suite de fonctions $(\phi_n)_{n \geq 1}$ converge simplement quand $n \to +\infty$, et en déduire un résultat de convergence sur la suite de v.a.r. $(S_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 2 ($\sim$ 7 pts) On définit la fonction $\Gamma \colon \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par $\Gamma \colon \alpha \mapsto \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$. Étant donnés des paramètres $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$, on appelle *loi Gamma* $\Gamma(\alpha, \lambda)$ la loi de densité

$$f_{\alpha,\lambda} \colon x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\,.$$

1. (a) Montrer que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$, et $\Gamma(1) = 1$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n \geq 1$ entier ? *Indication :* faire une intégration par parties.
   (b) Vérifier que $f_{\alpha,\lambda}$ est bien une densité de probabilité.
   (c) Reconnaître la loi $\Gamma(1, \lambda)$.
   (d) Soit X une v.a.r. de loi $\Gamma(\alpha, 1)$. Pour $\lambda > 0$, calculer la loi de $X_\lambda := \frac{X}{\lambda}$.
2. Soit U, V deux v.a.r. indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha, \lambda)$ et $\Gamma(\beta, \lambda)$, avec $\alpha, \beta > 0$.
   (a) Rappeler la densité $f_{(U,V)}$ du couple (U, V), puis calculer la loi du couple $(Y, Z) = (\frac{U}{U+V}, U+V)$. *Indication :* vérifier que $(u, v) \mapsto (y, z) = (\frac{u}{u+v}, u+v)$ est un C^1-difféomorphisme de $]0, +\infty[^2$ sur $]0, 1[\times]0, +\infty[$ et considérer $\mathbb{E}(h(U, V))$ pour $h \colon]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ continue bornée.
   (b) En déduire la loi de la v.a.r. $Z = U + V$.
   (c) Retrouver le résultat de la question (2b) à l'aide d'un produit de convolution.
   (d) Exprimer la densité f_Y de la v.a.r. $Y = \frac{U}{U+V}$ et montrer que les v.a.r. Y, Z sont indépendantes.

Exercice 3 ($\sim$ 8 pts) On considère des v.a.r. indépendantes $(X_k)_{k \geq 1}$, avec $X_k \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $\mathbb{E}(X_k) = 0$, pour tout $k \geq 1$. Pour tout entier $k \geq 1$, on définit la v.a.r. $S_k := X_1 + \cdots + X_k$. Notre but est de démontrer l'*inégalité de Kolmogorov* (qui renforce l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour des v.a. indépendantes), c'est-à-dire : pour tout entier $n \geq 1$, et pour tout réel positif $t > 0$,

$$P\big(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq t\big) \leq \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k). \tag{1}$$

Fixons $n \geq 1$ et $t > 0$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on définit l'événement $A_k := \{|S_k| \geq t\} \in \mathcal{A}$.

1. Exprimer l'événement $\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq t\}$ à l'aide des événements $A_1, \ldots, A_n$.

2. Vérifier que les événements

$$B_k := A_k \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \Big)^c, \quad k = 1, \dots, n$$

sont disjoints, et satisfont $\cup_{k=1}^n B_k = \cup_{k=1}^n A_k$.

3. À l'aide de la question précédente, montrer que pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{B_k} S_k (S_n - S_k)\big) = 0.$$

Indication : réécrire S_k et $(S_n - S_k)$ à l'aide des $(X_j)_{j=1,\dots,n}$.

4. En déduire que

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{B_k} [S_n^2 - 2S_k(S_n - S_k)]\Big) \leq \mathbb{E}(S_n^2),$$

puis que

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{B_k} [S_n^2 - 2S_k(S_n - S_k)]\Big) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_k} S_k^2).$$

Indication : penser à l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, pour $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Montrer que pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$P(B_k) = P(\mathbb{1}_{B_k} |S_k| \geq t) \leq \frac{1}{t^2} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_k} S_k^2).$$

6. Conclure la preuve de l'inégalité de Kolmogorov (1).

7. On suppose en plus que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{Var}(X_k) < +\infty$. Montrer que la suite de v.a.r. $(S_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. *Indication :* montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est p.s. de Cauchy en utilisant l'inégalité (1) pour $\max_{m\geq n} |S_m - S_n|$.