Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences

2021-2022
L3S6 Probabilités.

Examen de probabilités (durée : 2h)

Deuxième session

Dans tous les exercices, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel les variables aléatoires sont définies. On rappelle que "v.a.(r.)" signifie "variable aléatoire (réelle)".

Exercice 1 ($\sim$ 3 pts) Soit $p \in [0,1]$.

1. Calculer la fonction caractéristique ϕ_X d'une v.a.r. X de loi de Bernoulli de paramètre p.
2. On se donne $n \geq 1$ v.a.r. indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de loi de Bernoulli de paramètre p. Calculer la fonction caractéristique ϕ_S de leur somme $S := X_1 + \cdots + X_n$. Quelle est la loi de S ?

Exercice 2 ($\sim$ 5 pts) Soit $\rho > 0$, et soit $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$ le disque de centre $(0,0)$ et rayon $\rho > 0$. On considère un couple $Z = (X,Y)$ de v.a.r. à valeurs dans D et de loi uniforme, i.e., de densité

$$f_Z \colon (x,y) \mapsto \frac{1}{\pi\rho^2} \mathbb{1}_D(x,y).$$

1. Déterminer les densités marginales f_X et f_Y.
2. Calculer les espérances de X et Y.
3. On considère un jeu de fléchettes. On représente la cible par le disque D ; un lancer est décrit par le vecteur aléatoire $Z = (X,Y)$, où X, Y correspondent aux coordonnées du point d'impact de la fléchette. On suppose que le score obtenu correspond à la v.a.r. $S := \rho - \sqrt{X^2 + Y^2}$.
   Déterminer la loi de S (*indication :* on pourra considérer $\mathbb{E}(h(S))$ pour $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée).

Exercice 3 ($\sim$ 6 pts) Soit $Z = (X,Y)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On note $\phi = \phi_Z$ sa fonction caractéristique.

1. Montrer que la loi de Z est invariante par rotation si et seulement s'il existe une fonction ψ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(u,v) = \psi(u^2 + v^2)$.
2. On suppose que Z vérifie les conditions du (1) et aussi que X et Y sont indépendantes. On note ϕ_X et ϕ_Y les fonctions caractéristiques de X et de Y.
   (a) On note $\bar{z}$ le conjugué d'un nombre complexe z. Montrer que la fonction caractéristique ϕ_U d'une v.a.r. U satisfait $\overline{\phi_U(t)} = \phi_U(-t) = \phi_{-U}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Exprimer la fonction caractéristique ϕ de Z en fonction de ϕ_X et ϕ_Y, puis ϕ_X et ϕ_Y en fonction de ψ. Vérifier que ϕ_X et ϕ_Y sont paires et déduire du (*a*) qu'elles prennent des valeurs dans $\mathbb{R}$.
   (c) Déduire du (*b*) une relation vérifiée par ψ puis montrer que ψ ne peut s'annuler.
   (d) Montrer que X (et de même Y) suit une loi normale centréee de variance 2λ où $\lambda = -\log \psi(1)$.
   (e) On note $X = R\cos\theta$ et $Y = R\sin\theta$ avec $R > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Quelles sont les lois de θ et de R ? Sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 ($\sim$ 2 pts) Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables telles que pour une certaine constante $M > 0$, on ait

$$\int_X |f_n|^2 d\mu \leq M, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Montrer qu'il existe un ensemble $N \in \mathcal{B}$ de mesure nulle tel que pour tout $x \in N^c$, à partir d'un certain rang, on ait $|f_n(x)| < n$.

Exercice 5 ($\sim$ 4 pts) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1. Pour $n \geq 1$, on note $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.

1. Rappeler la loi de S_n. Que vaut $P(S_n \leq n)$?
2. En utilisant le théorème de la limite centrale, calculer la limite de la suite $\left(e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\right)_{n\geq 1}$.