Examen de probabilités (2h)

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel les variables aléatoires sont définies.

Exercice 1 On note N la variable aléatoire comptant le nombre d'oeufs pondus par un insecte donné. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose également que chaque oeuf donne naissance à un nouvel insecte avec probabilité $p \in [0, 1]$, indépendamment de l'éclosion des autres oeufs. On considère alors une famille $(X_j)_{j \geq 1}$ de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre p . On suppose que les variables aléatoires $N, X_1, X_2, \dots$ sont indépendantes et on note D le nombre de descendants de l'insecte.

1. Écrire D en fonction des variables aléatoires N et $(X_j)_j$.
2. Pour tout couple $(n, d) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P(D = d \mid N = n)$.
3. En déduire la loi de D et la loi du vecteur aléatoire $Z = (D, N)$.
4. Retrouver la loi de D en calculant la fonction génératrice.

Exercice 2

On cherche à donner une preuve probabiliste du théorème de Weierstrass (densité des polynômes parmi les fonctions continues de l'intervalle $[0, 1]$ pour la convergence uniforme). Dans la suite, pour une fonction continue $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, on note $\|g\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |g(x)|$.

Soit $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le polynôme Q_n :

$$Q_n(X) = \sum_{k=0}^n h\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

On considère une suite $(Y_j)_{j \geq 1}$ de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $x \in [0, 1]$ sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n := Y_1 + \dots + Y_n$.

1. Rappeler (sans preuve) la loi suivie par S_n . Donner l'espérance et la variance de la v.a. $\frac{S_n}{n}$.
2. Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers une limite que l'on déterminera.
3. Montrer que l'on peut écrire $Q_n(x) = \mathbb{E}\left(h\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(x) = h(x).$$

4. On veut montrer à présent que la convergence est uniforme. Pour cela, on fixe $\varepsilon > 0$ dans la suite. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $y, z \in [0, 1]$ avec $|y - z| < \delta$, on a $|h(y) - h(z)| < \varepsilon$.
5. On fixe $\delta > 0$ comme à la question précédente. Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}\left(\left|h\left(\frac{S_n}{n}\right) - h(x)\right|\right) = \int_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta\right\}} \left|h\left(\frac{S_n}{n}\right) - h(x)\right| dP + \int_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\}} \left|h\left(\frac{S_n}{n}\right) - h(x)\right| dP,$$

et en déduire que la première intégrale $I_1 := \int_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta\right\}} \left|h\left(\frac{S_n}{n}\right) - h(x)\right| dP$ satisfait $I_1 \leq \varepsilon$.

6. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\left|h\left(\frac{S_n}{n}\right) - h(x)\right|\right) \leq \varepsilon + 2\|h\|_\infty P\left(\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\}\right).$$

7. Montrer que

$$P\left(\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\}\right) \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$$

et que cette quantité tend vers 0 uniformément en x quand $n \rightarrow +\infty$. Conclure.

Exercice 3 *

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles (v.a.r.) indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
 - (a) Montrer que $X - Y$ est une variable à densité, de densité $h: z \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|z|}$.
 - (b) En déduire que $|X - Y|$ suit une loi exponentielle de paramètre λ .
 - (c) Montrer que les variables aléatoires $\min(X, Y)$ et $|X - Y|$ sont indépendantes (où $\min(X, Y)$ est la v.a.r. qui à $\omega \in \Omega$ associe $\min(X(\omega), Y(\omega))$).
2. Soient Z et T deux v.a.r. indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec $\alpha \neq \beta$. Déterminer la loi de $Z + T$.
3. **Application** : trois personnes A, B, C se rendent ensemble à l'agence d'une banque qui comporte deux automates; A et B s'installent chacun à un automate, et C remplace le premier des deux qui a terminé. On suppose que les durées d'utilisation de l'automate par A, B, C , notées respectivement X_A, X_B, X_C , sont trois v.a.r. suivant une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
 - (a) Calculer la probabilité pour que C sorte le dernier.
 - (b) Déterminer la loi de la v.a.r. T_C , où T_C désigne le temps total passé par C à la banque.
 - (c) Montrer que $\max(X_A, X_B)$ et T_C ont la même loi. Ces deux v.a.r. sont-elles indépendantes?