Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences

2020-2021
L3S6 Probabilités.

Examen de probabilités (2h)

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel les variables aléatoires sont définies.

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, la variable aléatoire $Y_k := X(X-1)\dots(X-k+1)$ est intégrable, et calculer son espérance $\mathbb{E}(Y_k)$.
2. Calculer les espérances $\mathbb{E}(X^\ell)$ pour chaque entier $\ell \in \{1, 2, 3\}$.

Exercice 2 Une marque de céréales offre, dans chaque paquet, une pièce d'un puzzle contenant au total $k \geq 1$ pièces. Chaque semaine, la pièce est prise au hasard parmi les k pièces possibles, indépendamment des semaines précédentes. Un collectionneur achète chaque semaine un paquet, et voudrait savoir combien de semaines il lui faudra pour pouvoir finir le puzzle. On numérote les pièces de 1 à k, et pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$ et $n \geq 1$, on note A_i^n l'événement :

"La i-ème pièce n'a pas été tirée au cours des n premières semaines".

1. Étant donnés $i \in \{1, \dots, k\}$ et $n \geq 1$, calculer la probabilité $P(A_i^n)$ de l'événement A_i^n.
2. Pour tout $n \geq 1$, on note X_n le nombre de pièces de puzzle encore manquantes après n semaines. Justifier que l'on peut écrire $X_n = \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{A_i^n}$ et calculer $\mathbb{E}(X_n)$. Montrer que $\mathbb{E}(X_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
3. On note T le nombre de semaines nécessaires pour compléter la collection. Montrer que pour $n \geq 1$,
$$P(T > n) = P(X_n \geq 1) \leq k\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n.$$
4. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$P(T > (1+\varepsilon)k \ln k) \to 0, \quad \text{quand } k \to +\infty.$$

Exercice 3 Fixons un réel $\theta > 0$. Soit $n \geq 1$ un entier. On effectue n expériences indépendantes, ayant chacune une probabilité $\frac{\theta}{n}$ de succès. On note X_n le nombre d'expériences ayant réussi.

1. Déterminer la loi de X_n et calculer sa fonction caractéristique ϕ_{X_n}.
2. Montrer que la suite de fonctions $(\phi_{X_n})_{n\geq 1}$ converge simplement[1] vers une fonction ϕ que l'on déterminera. La fonction ϕ est-elle la fonction caractéristique d'une variable aléatoire ?

Exercice 4 Soit $Z = (X, Y)$ une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]^2$ de densité $f_Z\colon (x,y) \mapsto \frac{Ky}{1+xy}\mathbb{1}_{[0,1]^2}$.

1. Calculer la constante K.
2. Déterminer les densités marginales de X et Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On considère la variable aléatoire $W = (U, V) = (X+Y, Y)$. Déterminer la densité de W. Pour cela, on pourra montrer que pour $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < v < 1,\ \ v < u < v+1\}$, l'application
$$\psi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \Delta & \to &]0,1[^2, \\ (u,v) & \mapsto & (u-v, v) \end{array} \right.$$
est un C^1-difféomorphisme.
5. En déduire que la variable aléatoire $X+Y$ admet une densité sur $[0,2]$, donnée par
$$f_{X+Y} : u \mapsto \int_{\max(0,u-1)}^{\min(1,u)} \frac{Kv}{1+v(u-v)} dv$$
(on ne demande pas de calculer cette intégrale).

1. i.e., que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $(\phi_{X_n}(t))_{n\geq 1}$ converge.