Université de Picardie Jules Verne — 2021-2022
UFR des Sciences — L3S6 Probabilités.

Devoir de probabilités

mercredi 30/03/22

Dans tous les exercices, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel les variables aléatoires sont définies. On rappelle que "v.a.(r.)" signifie "variable aléatoire (réelle)", et que des v.a.r. $(X_n)_{n\geq 0}$ sont dites i.i.d. si elles sont indépendantes et identiquement distribuées (i.e., ont toutes la même loi).

Exercice 1 Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit N une variable aléatoire entière indépendante des $(X_n)_{n\geq 1}$, de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la fonction génératrice g_N de la v.a. N.
2. Déterminer la fonction génératrice g_S de la variable aléatoire $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ (avec la convention $\sum_{k=1}^{0} X_k = 0$) en fonction de λ et de la fonction génératrice $g = g_{X_1}$ de la v.a. X_1.
3. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(S)$ de S en fonction de λ et de $m := \mathbb{E}(X_1)$.

Exercice 2 Soit (X, Y) une couple de v.a.r. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Posons $(T, U) := (\frac{Y}{X}, X)$ (rappelons que $P(X = 0) = 0$).

1. Quelle est la densité $f_{(X,Y)}$ du couple (X, Y) ?
2. Calculer la loi de (T, U).
3. En déduire la loi de T.

Université de Picardie Jules Verne — 2021-2022
UFR des Sciences — L3S6 Probabilités.

Devoir de probabilités

mercredi 30/03/22

Dans tous les exercices, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel les variables aléatoires sont définies. On rappelle que "v.a.(r.)" signifie "variable aléatoire (réelle)", et que des v.a.r. $(X_n)_{n\geq 0}$ sont dites i.i.d. si elles sont indépendantes et identiquement distribuées (i.e., ont toutes la même loi).

Exercice 3 Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit N une variable aléatoire entière indépendante des $(X_n)_{n\geq 1}$, de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la fonction génératrice g_N de la v.a. N.
2. Déterminer la fonction génératrice g_S de la variable aléatoire $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ (avec la convention $\sum_{k=1}^{0} X_k = 0$) en fonction de λ et de la fonction génératrice $g = g_{X_1}$ de la v.a. X_1.
3. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(S)$ de S en fonction de λ et de $m := \mathbb{E}(X_1)$.

Exercice 4 Soit (X, Y) une couple de v.a.r. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Posons $(T, U) := (\frac{Y}{X}, X)$ (rappelons que $P(X = 0) = 0$).

1. Quelle est la densité $f_{(X,Y)}$ du couple (X, Y) ?
2. Calculer la loi de (T, U).
3. En déduire la loi de T.