DM de probabilités

à rendre jeudi 24/03/22

Dans tous les exercices, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel les variables aléatoires sont définies. On rappelle que "v.a.(r.)" signifie "variable aléatoire (réelle)", et que des v.a.r. $(X_n)_{n\geq 0}$ sont dites i.i.d. si elles sont indépendantes et identiquement distribuées (i.e., ont toutes la même loi).

Remarque : les questions 1., 2. et 3. de l'exercice 1 suivant sont indépendantes.

Exercice 1 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$) On considère un promeneur se déplaçant sur l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$. On suppose qu'au temps $t = 0$ il se trouve à la position 0, et que pour tout entier $n \geq 0$, en notant $S_n \in \mathbb{Z}$ sa position au temps $t = n$, alors, indépendamment du passé :

— avec probabilité $\frac{1}{2}$, il fait un pas à droite et se retrouve à la position $S_n + 1$ au temps $t = n + 1$;

— avec probabilité $\frac{1}{2}$, il fait un pas à gauche et se retrouve à la position $S_n - 1$ au temps $t = n + 1$.

Formalisation : pour tout entier $n \geq 1$, on note $X_n \colon \Omega \to \{-1, 1\}$ la variable aléatoire qui vaut -1, resp. 1 si le promeneur fait un pas à gauche, resp. à droite entre les temps n et $n + 1$. En particulier, les v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d., $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$, et pour tout entier $n \geq 1$, la position du promeneur au temps n est représentée par la v.a. $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.

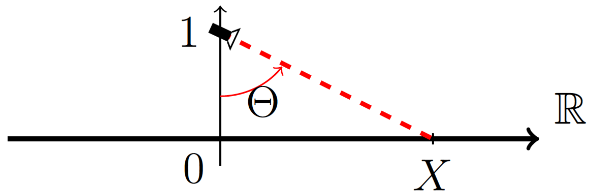
1. (a) Pour tout $n \geq 1$, calculer $P(S_{2n-1} = 0)$ et $P(S_{2n} = 0)$.
Bonus : pour $k \in \{-n, \ldots, n\}$, calculer $P(S_{2n} = 2k)$.
(b) Donner un équivalent de $P(S_{2n} = 0)$ quand $n \to +\infty$.
Indication : on rappelle la formule de Stirling $n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.
(c) Soit $Y \colon \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ la v.a. représentant le nombre total de passages du promeneur à la position 0 sur l'ensemble des temps positifs $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$. Exprimer Y sous la forme d'une série, et calculer son espérance $\mathbb{E}(Y)$.

2. (a) Étant donné un entier $K \geq 1$, on considère les événements
$$A_n := \{X_{nK+1} = X_{nK+2} = \cdots = X_{(n+1)K} = 1\}, \quad \forall\, n \geq 1.$$
Montrer qu'avec probabilité 1, une infinité d'événements A_n se produisent.
(b) En déduire que pour tout entier $K \geq 1$,
$$P\Big(-\frac{K}{2} < S_n < \frac{K}{2} \text{ pour tout } n \geq 1\Big) = 0,$$
puis que[1] $P\big(\{\liminf_n S_n = -\infty\} \cup \{\limsup_n S_n = +\infty\}\big) = 1$.

3. (a) Montrer que pour tout $t > 0$, la v.a. e^{tS_n} est dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et calculer son espérance $\mathbb{E}(e^{tS_n})$.
(b) Montrer que pour tout réel $u \in \mathbb{R}$, $\cosh(u) \leq e^{\frac{u^2}{2}}$ (on rappelle que $\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$).
Indication : on pourra considérer les séries entières des deux membres.
(c) Montrer que pour tout réel positif $t > 0$, et pour tout réel positif $\lambda > 0$,
$$P(S_n > \lambda) \leq \frac{(\cosh(t))^n}{e^{t\lambda}}.$$
Indication : on pourra remarquer (en le justifiant !) que $P(S_n > \lambda) = P(e^{tS_n} > e^{t\lambda})$.
(d) À l'aide des questions (3b) et (3c) et en optimisant en t, en déduire que pour tout $\lambda > 0$,
$$P(|S_n| > \lambda) \leq 2\exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2n}\Big).$$
(e) Soit $c > 2$. Déduire de la question précédente que presque sûrement, pour n suffisamment grand,
$$|S_n| \leq \sqrt{cn\ln n}.$$
Indication : penser au lemme de Borel-Cantelli pour des événements $(B_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ adaptés.

1. On rappelle que $\limsup_n S_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{S_k\}_{k\geq n}$, et $\liminf_n S_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{S_k\}_{k\geq n}$.

Exercice 2 On suspend un laser à un mètre au-dessus du sol. On représente l'angle qu'il forme avec la verticale par une variable aléatoire réelle Θ de loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Soit X la variable aléatoire donnant la position du point marqué au sol par le laser (voir la figure ci-dessous). Déterminer la loi de X.
Indication : on pourra considérer la fonction de répartition F_X de X.



Exercice 3 Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. Pour $t > 0$, on pose

$$S_f(t) := \{\omega \in \Omega : f(\omega) > t\}, \quad \text{et} \quad \Psi_f(t) := P(S_f(t)).$$

Montrer que

$$\int_\Omega f dP = \int_0^\infty \Psi_f(t) dt.$$

Exercice 4 Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 > 0$. Soit

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{et} \quad W = \arctan \frac{X}{Y}, \quad -\pi/2 < W \leq \pi/2.$$

Montrer que Z suit une loi de Rayleigh (i.e. Z admet pour densité $f_Z\colon z \mapsto \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(z)$), que W est uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$, et que Z et W sont indépendantes.