Université de Picardie Jules Verne 2020-2021
UFR des Sciences L3S6 Probabilités.

# Devoir à la maison

à rendre pour le 03/03/21

*Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel les variables aléatoires sont définies.*

**Exercice 1** On tire un entier dans $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ au hasard et on suppose que la variable aléatoire $X$ associée suit une loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$ (c'est-à-dire que $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ pour $n \geq 1$). On tire alors un entier selon une variable aléatoire $Y$ de loi binomiale $\mathcal{B}(X, p)$.

1. Proposer un espace de probabilité adapté au problème.
2. Quelle est la loi du couple $(X, Y)$ ?
3. En déduire que la loi $P_Y$ de $Y$ vérifie

$$P_Y(k) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k+1} \sum_{n \geq k,\ n \neq 0} \binom{n}{k} (1-p)^{2n}.$$

**Exercice 2** Soit $X$ une variable aléatoire réelle de loi de Cauchy (c'est-à-dire de densité $f_X : x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$). Montrer que $Y = \frac{1}{X}$ suit encore une loi de Cauchy (on pourra calculer $E(h(Y))$ pour $h$ mesurable bornée).

**Exercice 3** On considère une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \geq 1}$ indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[-1, 1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Rappeler la densité de la loi de $X_1$. Justifier l'existence de $E(X_1)$ et $V(X_1)$ et les calculer.
2. Calculer $E(\frac{1}{n} S_n)$ et $V(\frac{1}{n} S_n)$.
3. Montrer que pour tout $a > 0$, on a

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq a\right) \leq \frac{1}{3a^2 n}.$$

4. En déduire la loi faible des grands nombres : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X_1)\right| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

5. Dans toute la suite, $\lambda > 0$ désigne un réel strictement positif. Montrer que $e^{\lambda X_1}$ est une variable aléatoire intégrable, et calculer $E(e^{\lambda X_1})$ (on admettra dans la suite que $E(e^{\lambda X_1}) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}}$).
6. Montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$P(S_n \geq t) \leq e^{-\lambda t} E(e^{\lambda S_n}),$$

et en déduire que

$$P(S_n \geq t) \leq e^{\frac{n\lambda^2}{2} - \lambda t}.$$

7. Montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$P(S_n \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{2n}}.$$

8. Montrer que pour tout $a > 0$, on a

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq a\right) \leq 2e^{-\frac{a^2 n}{2}},$$

et comparer avec le résultat de la question 3.