Corrigé partiel de probabilités

L356, 2022-2023

/4 Ex. 1 $\mathbb{E}(X) = \lim_{n\to+\infty} E_n$, où

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} k \underbrace{P(X=k)}_{P(X>k-1)-P(X>k)} = \sum_{k=1}^{n} k P(X>k-1) - \sum_{k=1}^{n} k P(X>k)$$

$\ell = k-1$

$$= \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) P(X>\ell) - \sum_{k=0}^{n} k P(X>k)$$

2 +1 (Σ finies)

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)-k\right] P(X>k) - n P(X>n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - n P(X>n)$$

+1

$$\underbrace{\mathbb{E}(X) - E_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k P(X=k) \geq n \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k) = n P(X>n)$$

$$\Rightarrow n P(X>n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc $\mathbb{E}(X) = \lim_{n\to+\infty} E_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(X>k) - n P(X>n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.

/9 Ex. 2

/3 =1+2

1) • $P(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\delta_{a_k}(\mathbb{R})}_{1 \text{ car } a_k \in \mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$

• Si $(B_j)_j \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ disjointes,

$$P\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} B_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\delta_{a_k}\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} B_j\right)}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } a_k \notin \bigcup_{j=0}^{+\infty} B_j \\ 1 \text{ si } a_k \in B_j \text{ pour un } j \in \mathbb{N} \\ \quad \text{et alors ce } j \text{ est unique car les } (B_\ell)_\ell \text{ sont disjointes} \end{cases}$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \delta_{a_k}(B_j)$$

car si $a_k \notin \bigcup_j B_j$ alors $a_k \notin B_j \ \forall j$ et donc $\sum_j \delta_{a_k}(B_j) = 0$

et si $a_k \in \bigcup_j B_j$ alors $\exists! \ j_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $a_k \in B_{j_0}$ et alors $\delta_{a_k}(B_{j_0}) = 1$ et $\delta_{a_k}(B_j) = 0, \ \forall j \neq j_0$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{a_k}(B_j) \right)$$

(interversion par lin. + CV monotone)

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} P(B_j).$$

/1 2) $$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B \, dP = P(B) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\delta_{a_k}(B)}_{\substack{=0 \text{ si } a_k \in B \\ =1 \text{ sinon}}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbb{1}_B(a_k)$$

/3 =1+1+1 3) $f = \lim_{p \to +\infty} f_p$ où f_p = C.L. de fonctions indicatrices (fonction étagée)

et $(f_p)_p \nearrow$.

Par CV monotone (Beppo-Levy), $\int_{\mathbb{R}} f_p \, dP \underset{p \to +\infty}{\nearrow} \int_{\mathbb{R}} f \, dP$,

Or $f_p = \sum_{i=0}^{\ell(p)} \mu_i^p \mathbb{1}_{B_i^p}$, où $\mu_i^p \in \mathbb{R}$, $B_i^p \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\ell(p) \in \mathbb{N}$,

donc $$\int_{\mathbb{R}} f_p \, dP \underset{\text{lin. de } E}{=} \sum_{i=0}^{\ell(p)} \mu_i^p \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B_i^p} \, dP}_{\underset{\text{d'après ci-dessus}}{=} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbb{1}_{B_i^p}(a_k)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\sum_{i=0}^{\ell(p)} \mu_i^p \mathbb{1}_{B_i^p}(a_k)}_{f_p(a_k)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_p(a_k)$$

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_p(a_k) \underset{p\to+\infty}{\nearrow} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k)$

donc $\displaystyle \mathbb{E}(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k)$

/2 4) $f = f_+ - f_-$

=1+1

f_+ : partie pos. de f ; f_- : partie neg. de f

$$\mathbb{E}(f_\pm) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_\pm(a_k)}_{<+\infty} \quad \text{d'après 3)}$$

et alors $\mathbb{E}(f) = \mathbb{E}(f_+) - \mathbb{E}(f_-) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(f_+(a_k) - f_-(a_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k)$.

5) $f : \mathbb{R} \to I$, alors $f(a_k) \in I$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$

donc $\mathbb{E}(f) = \underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k)}_{\text{Combinaison convexe de points de } I} \in I$ car I est convexe (c'est un intervalle).

/8 Ex. 3

/2 1) Par réc. on montre que $\ell(n) = 2^n$, $\forall n \geq 0$.

$$K_n = \bigsqcup_{k=1}^{2^n} I_n^k \in \mathcal{B}([0,1])$$

$\downarrow$

intervalles donc $\in \mathcal{B}([0,1])$

$$K = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_n \in \mathcal{B}([0,1])$$ (stabilité par int. dénombrable des boréliens)

/3 2) $$K_{n+1} = \bigsqcup_{k=1}^{2^n} \left(I_n^k - J_n^k\right)$$

$$\Rightarrow \lambda(K_{n+1}) = \sum_{k=1}^{2^n} \lambda(I_n^k) - \underbrace{\lambda(J_n^k)}_{(1-\varepsilon_n)\lambda(I_n^k)} = \sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_n \lambda(I_n^k)$$

$$= \varepsilon_n \sum_{k=1}^{2^n} \lambda(I_n^k)$$

$$= \varepsilon_n \lambda\left(\bigsqcup_{k=1}^{2^n} I_n^k\right) = \varepsilon_n \lambda(K_n).$$

$$\lambda(K_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \underbrace{\lambda(K_0)}_{1}$$

/2

3) $$\underbrace{\prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k = \exp\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \log \varepsilon_k}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty}\Big)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Comme $K_n \searrow K$ on a $\lambda(K_n) \searrow \lambda(K)$

mais $\lambda(K_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \searrow 0$ donc $\lambda(K) = 0$.

/1 4) $\lambda(K_n) \underset{n\to+\infty}{\searrow} e^{-a} = \lambda(K)$.

/4 Ex. 4 Soit P une telle proba.

$$1 = P(\mathbb{R}) = \lim_{n \to +\infty} P([-n, n]) \quad \text{car} \quad ([-n,n])_{n \geq 0} \text{ croît vers } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] = \mathbb{R}.$$

donc $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $P([-n_0, n_0]) > \frac{1}{2}$.

Soit $a := 2n_0$. $\quad T_a^{-1}([-n_0, n_0]) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } -n_0 \leq x + a \leq n_0\}$

$$= [-n_0 - a, n_0 - a] = [-3n_0, -n_0]$$

$\Rightarrow T_a^{-1}[-n_0, n_0]$ disjoint de $[-n_0, n_0]$

et alors
$$\underbrace{P([-n_0, n_0] \sqcup T_a^{-1}[-n_0, n_0])}_{\leq P(\mathbb{R}) = 1} = P([-n_0, n_0]) + P(T_a^{-1}[-n_0, n_0])$$
$$= P([-n_0, n_0]) + \underbrace{(T_a)_* P([-n_0, n_0])}_{P([-n_0, n_0]) \text{ par hyp.}}$$
$$= 2P([-n_0, n_0]) > 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

absurde car

/17 Ex. 5

/1 1) $$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_n^i$$

/3 2) Z_n et $(X_n^i)_{i=1}^{Z_n}$ indep. + $(X_n^i)_{i=1}^{Z_n}$ iid

$$\Rightarrow g_{n+1} = g_{Z_{n+1}} = g_{Z_n} \circ g_{X_n^i}$$

$$= g_n \circ g$$

/2 3) $$g_0(s) = \mathbb{E}(s^{Z_0}) = s^0 \underbrace{\mathbb{P}(Z_0=0)}_{=0} + s^1 \underbrace{\mathbb{P}(Z_0=1)}_{=1} + s^2 \underbrace{\mathbb{P}(Z_0=2)}_{=0} + \underbrace{\dots}_{=0}$$

$$= s$$

donc $$g_1 = g_0 \circ g = g = g^1$$

$$g_2 = g_1 \circ g = g \circ g = g^2$$

et $\forall n \geq 0$, $$g_n = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_{n \text{ fois}} = g^n.$$

/3 4) $g_n = g^n$ est dér. en 1 car g l'est en 1 (car $\mathbb{E}(X_i^n) < +\infty$)

et $g(1) = \mathbb{E}(1^{X_i^n}) = 1$

$$\Rightarrow g_n' = (g^n)' = (g^{n-1} \circ g)'$$

$$= (g^{n-1})' \circ g \times g'$$

$$\rightsquigarrow g_n'(1) = (g^{n-1})'(\underbrace{g(1)}_{1}) \times g'(1) = g_{n-1}'(1)\, g'(1)$$

$$= \dots \quad (\text{réc.})$$

$$= (g'(1))^n$$

/2 5) $g_n'(1) = (g'(1))^n$ existe et $g_n = g_{Z_n}$ donc $\mathbb{E}(Z_n) < +\infty$,

et $\mathbb{E}(Z_n) = g_n'(1) = \underbrace{(g'(1))}_{\mathbb{E}(X_i^n)}{}^n = \alpha^n$.

/3 = 1+2

b) Si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_n^i = 0$

donc $A_n^c \subset A_{n+1}^c$

et $A_n \supset A_{n+1}$ i.e. $(A_n) \downarrow$

$$P(A_n) = P(Z_n \neq 0) \leq \mathbb{E}(Z_n) = \alpha^n$$

En effet, $\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, P(Z_n = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(Z_n = k)$

$$\geq \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_n = k) = P\left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} \{Z_n = k\}\right)$$

$$= P(Z_n > 0)$$

$$= P(Z_n \neq 0).$$

/3 7) $P(A_n) \leq \alpha^n \Rightarrow \sum_n P(A_n) < +\infty$ (par comparaison).

avec $\alpha \in [0,1)$

Par Borel-Cantelli on déduit que $P\left(\limsup_{n \to +\infty} A_n\right) = 0$,

i.e. la probabilité qu'une infinité de A_n se réalisent est nulle.

En d'autres termes, avec probabilité 1, A_n^c se réalise pour toute $n \geq n_0$
(n_0 assez grand)

i.e. $Z_n = 0$ pour $n \geq n_0$.