Corrigé du partiel du 10 mars

Probabilités L3 S6, UPJV

Barème /40

I /20

1) /2
2) /2
3) /2
4) /2
5) /3
6) a) /2
   b) /4
   c) /3

II /7

1) /2
2) /2
3) /3

III /9

1) /2
2) /2
3) /5

IV /4

1) /2
2) /2

Exercice 1

1) $$P(A_n) = P\left(\{(X_n, X_{n+1}) = (0,1)\} \cup \{(X_n, X_{n+1}) = (1,0)\}\right)$$

$$= P(X_n = 0 \text{ et } X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1 \text{ et } X_{n+1} = 0)$$

X_n, X_{n+1} indép

$$= P(X_n = 0)\, P(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1)\, P(X_{n+1} = 0)$$

$$= p(1-p) + (1-p)p$$

$$= 2p(1-p)$$

2) $$P(A_n \cap A_{n+1}) = P\left(\{(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}) = (0,1,0)\}\right) + P\left(\{(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}) = (1,0,1)\}\right)$$

$$= P(X_n = 0 \text{ et } X_{n+1} = 1 \text{ et } X_{n+2} = 0) + P(X_n = 1 \text{ et } X_{n+1} = 0 \text{ et } X_{n+2} = 1)$$

X_n, X_{n+1}, X_{n+2} indép

$$= P(X_n = 0)\, P(X_{n+1} = 1)\, P(X_{n+2} = 0)$$
$$+ P(X_n = 1)\, P(X_{n+1} = 0)\, P(X_{n+2} = 1)$$
$$= p(1-p)\,p + (1-p)\,p\,(1-p)$$
$$= p(1-p)\left[p + (1-p)\right] = p(1-p)$$

3) $f(x) = 4x(1-x) = 4x - 4x^2$ est un polynôme du 2nd degré en x

- $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1$ et $4x(1-x) \geq 0$
- $\max\limits_{[0,1]} f$? On cherche max de f sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4 - 8x = 4(1-2x)$$

	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$$\Rightarrow \max_{\mathbb{R}} f = \max_{[0,1]} f = f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 4\,\tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) = 1$$

De plus, $f(x) = \max_{\mathbb{R}} f = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$ ie $x = \frac{1}{2}$

Conclusion : $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq \max_{\mathbb{R}} f = 1$, ie $f([0,1]) \subset [0,1]$,

et $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

4) $P(A_n \cap A_{n+1}) = p(1-p)$ d'après 2)

$P(A_n)\, P(A_{n+1}) = (2\, p(1-p))^2$ d'après 1)

$= 4\, p^2 (1-p)^2$

$\rightsquigarrow A_n, A_{n+1}$ indép $\Leftrightarrow 4\, p^2 (1-p)^2 = p(1-p)$

$\Leftrightarrow 4\, p(1-p) = 1$ $\quad p, 1-p \neq 0$

$\Leftrightarrow f(p) = 1$

$\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$ d'après 3)

5) $P(A_{n+k} \mid A_n) = \dfrac{P(A_n \cap A_{n+k})}{P(A_n)}$ $\quad (P(A_n) > 0$ d'après 1)$)$

$$P(A_n \cap A_{n+k}) = P\left((X_n, X_{n+1}) \in \{(0,1),(1,0)\} \text{ et } (X_{n+k}, X_{n+k+1}) \in \{(0,1),(1,0)\}\right)$$

$k \geq 2$

$\Rightarrow (X_n, X_{n+1})$ et (X_{n+k}, X_{n+k+1}) sont indépendants

$$= P\left((X_n, X_{n+1}) \in \{(0,1),(1,0)\}\right) P\left((X_{n+k}, X_{n+k+1}) \in \{(0,1),(1,0)\}\right)$$

$$= P(A_n)\, P(A_{n+k})$$

donc A_n, A_{n+k} sont indépendants

et $P(A_{n+k} \mid A_n) = P(A_{n+k}) = 2p(1-p)$

6) a) $P(T_1 > k) = P\Big(\{(X_1, \dots, X_{k+1} = (0, \dots, 0)\} \cup \{(X_1, \dots, X_{k+1} = (1, \dots, 1)\}\Big)$

$X_1, \dots, X_{k+1}$ indépendantes

$$= P(X_1 = 0)\, P(X_2 = 0) \cdots P(X_{k+1} = 0) + P(X_1 = 1)\, P(X_2 = 1) \cdots P(X_{k+1} = 1)$$

$$= p^{k+1} + (1-p)^{k+1}$$

$\forall k \geq 1, \quad \{T_1 = +\infty\} \subset \{T_1 > k\}$

donc $P(\{T_1 = +\infty\}) \leq P(T_1 > k) = \underbrace{p^{k+1} + (1-p)^{k+1}}_{\to 0 \text{ quand } k \to +\infty}$

donc $P(\{T_1 = +\infty\}) \leq \inf_k \left(p^{k+1} + (1-p)^{k+1}\right) = 0$

et $P\left(\{T_1 < +\infty\}\right) = 1$

b) $\limsup_k A_{2k} = \bigcap_{n \geq 1} \left(\bigcup_{k \geq n} A_{2k} \right)$

est l'événement "une infinité de A_{2k} se produisent"

i.e, $\exists\ 1 \leq k_1 < k_2 < \dots \in \mathbb{N}$ tq A_{2k_n} se produit pour tout $n \geq 1$

(suite $(k_n)_n$ d'entiers)

Mais A_{2k_1} se produit ssi $X_{2k_1} \neq X_{2k_1+1}$ et donc $T_1 \leq 2k_1$

A_{2k_1} et A_{2k_2} se produisent ssi $\left(X_{2k_1} \neq X_{2k_1+1} \text{ et } X_{2k_2} \neq X_{2k_2+1}\right)$

et donc $T_1 \leq 2k_1$ et $T_2 \leq 2k_2$ $\quad (2k_2 > 2k_1)$

donc $\bigcap_{n \geq 1} A_{2k_n}$ se produit $\Rightarrow \bigcap_{n \geq 1} \{T_n \leq 2k_n\}$

Comme $\{T_n \leq 2k_n\} \subset \{T_n \neq +\infty\}$, on conclut

$$\limsup_k A_{2k} \subset \bigcap_{n \geq 0} \{T_n \neq +\infty\}$$

c) $P(A_{2k}) = 2p(1-p) > 0$ d'après 1)

donc $\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_{2k}) = +\infty$

Comme les $(A_{2k})_{k \geq 1}$ sont indépendants

(d'après 5), car $k < \ell$
$\Rightarrow A_{2\ell} = A_{2k} + \underbrace{2(\ell - k)}_{\geq 2}$)

Borel-Cantelli $\Rightarrow P\left(\limsup_k A_{2k}\right) = 1$

$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n \geq 0} \{T_n \neq +\infty\}\right) = 1$ d'après b)

Exercice 2

1) $P(|X| > a) = P(|X| > a) = P(\{X > a\} \cup \{X < -a\})$

$$= P(X > a) + P(X < -a)$$

mais $P(X < -a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = P(X > a)$

$y = -x$

donc $P(|X| > a) = 2\, P(X < -a)$

et $P(X \geq -a) = 1 - P(X < -a) = 1 - \frac{1}{2} P(|X| > a)$

2) $P(|X| > a) = P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$ d'après Bienaymé - Tchebycheff

$= \frac{1}{a^2}$

d'où par 1)

$$P(X \geq -a) \geq 1 - \frac{1}{2a^2}$$

i.e. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq 1 - \frac{1}{2a^2}$

3) $E(|e^{\lambda X}|) < +\infty$?

$$E(\underbrace{|e^{\lambda X}|}_{= e^{\lambda X}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}}}^{= e^{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\lambda}{2}\right)^2} e^{\frac{\lambda^2}{8}}} dx$$

$$= \frac{e^{\frac{\lambda^2}{8}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = 1$$

$y = x - \frac{\lambda}{2}$

$(dy = dx)$

$$= e^{\frac{\lambda^2}{8}}$$

Exercice 3

1) Par symétrie $f_X = f_Y$

Si $|x| > c$, $f_X(x) = 0$

Si $|x| \leq c$,

$\mathbb{1}_D(x,y) = 0$ sauf si $x^2 + y^2 \leq c^2$

or $x^2 + y^2 \leq c^2 \iff |y| \leq \sqrt{c^2 - x^2}$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_Z(x,y)\, dy = \frac{1}{\pi c^2} \int_{-\sqrt{c^2-x^2}}^{\sqrt{c^2-x^2}} dy = \frac{2\sqrt{c^2-x^2}}{\pi c^2}$$

2) $E(X) = E(Y)$ par symétrie

or $E(X) = \int_{-c}^{c} x f_X(x)\, dx$

car $|x| > c$
$\Rightarrow f_X(x) = 0$ d'après 1)

On fait le changement de var $y = -x$ $dy = -dx$

$$\rightsquigarrow E(X) = \int_{c}^{-c} \underbrace{-y f_X(-y) (-dy)}_{y f_X(y)\, dy \text{ car } f_X(-y) = f_X(y) \text{ d'après 1)}} = -\int_{-c}^{c} y f_X(y)\, dy = -E(X)$$

d'où $E(X) = E(Y) = 0$

3) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée

$$E(h(S)) = \iint_{\mathbb{R}^2} h\left(e - \sqrt{x^2+y^2}\right) f_Z(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi e^2} \iint_D h\left(e - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy$$

On passe en polaires : $\psi :]0,e] \times [0, 2\pi) \longrightarrow D \setminus \{(0,0)\}$ difféo

$$(r, \theta) \longmapsto (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$$

$$\left(r = \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

et $\mathrm{Jac}(\psi)(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

$$\Rightarrow \quad E\left(h(S)\right) = \frac{1}{\pi \rho^2} \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} h(\rho - r)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{2}{\rho^2} \int_0^{\rho} h(\underbrace{\rho - r}_{z})\, \underset{\rho - z}{r}\, \underset{(-dz)}{dr}$$

$$= \frac{2}{\rho^2} \int_0^{\rho} h(z)\, (\rho - z)\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(z) \underbrace{\left[\frac{2}{\rho^2} \mathbb{1}_{[0,\rho]}(z)\, (\rho - z) \right]}_{f_S(z)} dz$$

Exercice 4

1) $\phi_X(u) = E\left(e^{iuX}\right) = e^{iu0}\, P(X=0) + e^{iu1}\, P(X=1)$

$= 1 - p + p e^{iu}$

2) $\phi_S(u) = E\left(e^{iu(X_1 + \dots + X_n)}\right) = E\left(e^{iuX_1} e^{iuX_2} \dots e^{iuX_n}\right)$

$= E\left(e^{iuX_1}\right) E\left(e^{iuX_2}\right) \quad E\left(e^{iuX_n}\right)$ par indép

$= \left(E\left(e^{iuX_1}\right)\right)^n$ car toutes ont même loi

$= \left(1 - p + p e^{iu}\right)^n = \phi_Y(u)$

où Y est une v.a.r de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

Conclusion S suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$