Corrigé Examen Session 1,

Probabilités L3S6, UPJV 2021

Corrigé examen Proba L3S6

Ex. 1 :

1) $D = \sum_{j=1}^{N} X_j$

2) $P(D=d \mid N=n) = \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d}$ si $n \geq d$, 0 sinon.

Car le nombre de descendants est $\leq$ nombre d'œufs pondus

3) Loi de D : $d \in \mathbb{N} \rightsquigarrow P(D=d) = P\left(\bigcup_{n \geq d} \{D=d \text{ et } N=n\}\right)$

$$= \sum_{n=d}^{+\infty} P(D=d \text{ et } N=n)$$

$$= \sum_{n=d}^{+\infty} \underbrace{P(D=d \mid N=n)}_{\binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d}} \underbrace{P(N=n)}_{e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}}$$

$\binom{n}{d} \to \frac{n!}{d!(n-d)!}$

$k = n-d$

$$\rightsquigarrow P(D=d) = \frac{p^d}{d!} e^{-\lambda} \sum_{n=d}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-d}}{(n-d)!} \lambda^{n-d} \times \lambda^d$$

$$P(D=d) = \frac{(\lambda p)^d}{d!} e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!}}_{e^{(1-p)\lambda}} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^d}{d!}$$

$\rightsquigarrow$ loi de Poisson de param. (λp).

Loi de $Z = (D, N)$:

$$(d,n) \in \mathbb{N}^2 \rightsquigarrow P(Z=(d,n)) = P(D=d \text{ et } N=n) = P(D=d / N=n)\, P(N=n)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n < d \\ \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} & \text{si } n \geq d \end{cases}$$

$$= \frac{p^d}{d!} \times \frac{(1-p)^{n-d}}{(n-d)!} \times e^{-\lambda} \lambda^n$$

4) $$g(s) = \mathbb{E}(s^D) = \sum_{d=0}^{+\infty} s^d P(D=d)$$

$$= \sum_{d=0}^{+\infty} \sum_{n=d}^{+\infty} s^d P(D=d \text{ et } N=n)$$

$$= \sum_{d=0}^{+\infty} \sum_{n=d}^{+\infty} s^d \frac{p^d}{d!} \frac{(1-p)^{n-d}}{(n-d)!} e^{-\lambda} \lambda^n$$

$$= \sum_{d=0}^{+\infty} (\lambda s)^d \frac{p^d}{d!} e^{-\lambda} \sum_{n=d}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-d}}{(n-d)!} \lambda^{n-d}$$

$k = n-d$

$$= \sum_{d=0}^{+\infty} (\lambda s)^d \frac{p^d}{d!} \cancel{e^{-\lambda}} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!}}_{e^{\cancel{(1-p)}\lambda}}$$

$$= e^{-\lambda p} \underbrace{\sum_{d=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p s)^d}{d!}}_{e^{\lambda p s}} = e^{\lambda p (s-1)}$$

$\hookrightarrow$ fonction gén. d'une loi de Poisson de param. (λp).

$\Rightarrow$ D suit une loi de Poisson de param. (λp).

Ex. 2 : voir corrigé ex. 5 de l'Examen de 2018

Ex. 3 :

1) a) X et Y sont indépendantes de loi exp. de paramètre $\lambda > 0$

donc la densité f_Z de $Z = (X, Y)$ est

$$f_Z : (x,y) \longmapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, \lambda e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\, \lambda e^{-\lambda y} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\, \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}.$$

Soit h mesurable bornée. On a :

$$\mathbb{E}\big(h(X-Y)\big) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x-y)\, f_Z(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} h(x-y)\, \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\, dx\, dy$$

$\rightsquigarrow$ $(z,t) := (x-y, y)$ $\rightsquigarrow$ dét. jac. $= 1$

et $x \geq 0$ et $y \geq 0 \iff t \geq -z$ et $t \geq 0 \iff t \geq \max(0, -z) = z^-$

$\left(\begin{array}{l} x+y \\ = (x-y) + 2y = z + 2t \end{array} \right)$

$$\rightsquigarrow \mathbb{E}\big(h(X-Y)\big) = \int_{\mathbb{R}} h(z)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t - z^-)\, \lambda^2 e^{-\lambda(z+2t)}\, dz\, dt$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{E}\left(h(X-Y)\right) = \int h(z)\lambda e^{-\lambda z}\left(\int_{z^-}^{+\infty} \lambda e^{-2\lambda t}\,dt\right)dz$$

$$= \int h(z)\,\frac{\lambda}{2}\,e^{-\lambda(z+2z^-)}\,dz$$

d'où $\mathbb{E}\left(h(X-Y)\right) = \int_{\mathbb{R}} h(z)\,\frac{\lambda}{2}\,e^{-\lambda|z|}\,dz$

d'où la densité $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|z|}$ pour $(X-Y)$.

b) $P\left(|X-Y|<t\right) = P\left(-t<X-Y<t\right) = \int_{-t}^{t}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|z|}\,dz = \int_0^t \lambda e^{-\lambda z}\,dz$

$= P\left(X<t\right)$.

$\rightsquigarrow$ $|X-Y|$ a la même fonction de répartition donc la même loi que X

(i.e. loi exponentielle de param. λ)

c) $M = \inf(X, Y)$ est de loi exponentielle de param. (2λ).

$$\left(\overset{t>0 :}{P(M < t)} = P(\inf(X,Y) < t) = P(X < t \text{ ou } Y < t) \right.$$

$$= 1 - P(X \geq t \text{ et } Y \geq t)$$

ind.

$$= 1 - P(X \geq t)\, P(Y \geq t)$$

$$= 1 - \underbrace{\left(\int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u}\, du \right)}_{\left[-e^{-\lambda u}\right]_t^{+\infty}}^2$$

$$= 1 - \left(e^{-\lambda t}\right)^2 = 1 - e^{-2\lambda t}$$

donc densité : $\frac{d}{dt} P(M < t) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ loi exp. de param. (2λ) $\Big)$

Soit $N = |X - Y|$, et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable bornée.

$$\mathbb{E}\big(h(M, N)\big) = \int h\big(\inf(x,y), |x-y|\big)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\, \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\, dx\, dy$$

$$= 2 \int h(x, y-x)\, \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq y\}}\, \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\, dx\, dy \qquad \text{par symétrie.}$$

Changement de var. $(z = x,\ t = y-x)$ de jacobien $= 1$:

la condition $(0 \leq x \leq y)$ devient $(z \geq 0$ et $t \geq 0)$, et $x+y = 2z+t$, d'où

$$\mathbb{E}\big(h(M,N)\big) = \int 2\, h(z,t)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, \lambda^2 e^{-\lambda(2z+t)}\, dz\, dt$$

d'où la densité $f_{(M,N)}(z,t) = \underbrace{2\lambda \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\, e^{-2\lambda z}}_{f_M(z)}\ \underbrace{\lambda \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, e^{-\lambda t}}_{f_N(t)}$

$\Rightarrow$ indép. de M et N.

e) $Z+T$ a pour densité

$$f_Z * f_T(x) := \int f_Z(x-y)\, f_T(y)\, dy = \int \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-y)\, \alpha e^{-\alpha(x-y)}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\, \beta e^{-\beta y}\, dy$$

$$= (\alpha\beta)\, e^{-\alpha x}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \int_0^x e^{(\alpha-\beta)y}\, dy$$

d'où $f_Z * f_T(x) = (\alpha\beta)(\alpha-\beta)^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \left(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right)$

3) a) $p := P\left(C \text{ sorte le dernier}\right) = P\left(|X_A - X_B| < X_C\right) = P\left(|X_A - X_B| - X_C < 0\right)$

or $|X_A - X_B|$ est de loi exp. de param. λ d'après 1) b)

et est indép. de X_C (car X_A, X_B, X_C indép.)

donc $|X_A - X_B| - X_C$ a pour densité h (d'après 1) a))

↳ fonction paire

On en déduit que $p = \frac{1}{2}$.

b) $T_C = \underbrace{\inf(X_A, X_B)}_{\substack{\text{loi exp. de} \\ \text{param. } 2\lambda \\ \text{d'après 1) c)}}} + X_C$ et $\inf(X_A, X_B)$, X_C indép.

$\Longrightarrow T_C$ a pour densité $2\lambda \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\left(e^{-\lambda x} - e^{-2\lambda x}\right)$

d'après la qu. 2)

c) $\sup(X_A, X_B) = \inf(X_A, X_B) + |X_A - X_B|$

est, comme T_C, la somme de 2 v.a.r. exponentielles de paramètres respectifs (2λ) et λ donc a la même loi que T_C.

$$\mathrm{Cov}\left(T_C, \sup(X_A, X_B)\right) = \mathrm{var}\left(\inf(X_A, X_B)\right) \neq 0.$$

Les 2 v.a.r. sont corrélées donc non indépendants.