Corrigé du devoir à la maison

Probabilités L3 S6, 2021

Université de Picardie Jules Verne

Corrigé du DM de probabilités

Exercice 1

1) $\Omega = \{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ ou $\tilde{\Omega} = \{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ k \leq n\}$

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ensemble des parties de Ω (on est dans le cas discret)

$P = P_{(X,Y)}$ $\left(P_{(X,Y)}(n,k) = P((X,Y) = (n,k)) \right)$

2) Si $n = 0$ ou $k > n$, $P((X,Y) = (n,k)) = 0$; sinon (si $n > 0$ et $k \leq n$), on a

$$P((X,Y) = (n,k)) = P(X = n \text{ et } Y = k)$$

$$= \underbrace{P(Y = k \mid X = n)}_{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \underbrace{P(X = n)}_{p(1-p)^{n-1}}$$

$$= \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-(k+1)} = \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k+1} (1-p)^{2n}$$

3) $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$P_Y(k) = P(Y = k) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{(X,Y) = (n,k)\}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left((X,Y) = (n,k)\right)$$

$$= \sum_{n \geq k,\ n \neq 0} P\left((X,Y) = (n,k)\right)$$

$\left(P\left((X,Y) = (n,k)\right) = 0 \text{ si } n = 0 \text{ ou } k > n\right)$

$$= \sum_{n \geq k,\ n \neq 0} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k+1} (1-p)^{2n}$$

$$= \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k+1} \sum_{n \geq k,\ n \neq 0} \binom{n}{k} (1-p)^{2n}.$$

Exercice 2

X de densité f_X $\quad x \mapsto \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$Y = \frac{1}{X}$ $\quad \left(P(X=0) = 0 \text{ donc } Y \text{ existe p.p.} \right)$

Soit h mesurable bornée. On calcule.

$$E(h(Y)) = \int_{\mathbb{R}} h\left(\frac{1}{x}\right) f_X(x)\, dx \qquad \text{(par le théorème de transfert)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^*} h\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+x^2}\, dx \qquad (*)$$

Soit $\phi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$

C'est un difféomorphisme (de classe C^∞), et $\mathrm{Jac}(\phi)(x) = \phi'(x) = -\frac{1}{x^2}$

D'après (*), $E(h(Y)) = \int_{\mathbb{R}^*} h \circ \phi(x) \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+x^2} \, dx$

$$= \int_{\mathbb{R}^*} h \circ \phi(x) \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+(\phi(x))^2} \, |J(\phi)(x)| \, dx$$

$$\left(\frac{1}{1+(\phi(x))^2} \, |J(\phi)(x)| = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \, \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} \right)$$

par changement de variable $y = \phi(x)$

$$= \int_{\mathbb{R}^*} h(y) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2} \, dy$$

$$\rightsquigarrow \quad E\big(h(Y)\big) = \int_{\mathbb{R}} h(y) \underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+y^2}\right)}_{\text{densité } f_Y(y)} dy$$

(car l'égalité est vraie pour toute fonction mesurable bornée h)

donc Y est une v.a.r à densité et $f_Y : y \mapsto \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+y^2}$

i.e Y suit aussi la loi de Cauchy

Exercice 3

$(X_k)_{k\geq 1}$ iid de loi uniforme sur $[-1,1]$.

$\forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

1) $f_{X_1} = \dots = f_{X_n} = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}$

$|X_1| \leq 1$ (donc bornée) donc $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{L}^1$

Idem, $|X_1|^2 \leq 1$ donc $X_1^2 \in \mathcal{L}^1$ donc $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{L}^2$

On a $E(X_1) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X_1}(x)\, dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-1}^{1} x\, dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0} = 0$

Par ailleurs, $V(X_1) = E(X_1^2) - (\overbrace{E(X_1)}^{=0})^2$

$= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{X_1}(x)\, dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\, dx}_{\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

2) $E\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \frac{1}{n}\left(E(X_1) + \cdots + E(X_n)\right)$ (par linéarité)

$= \frac{n}{n} E(X_1)$ (car les X_k ont toutes la même loi)

$= E(X_1) = 0$

$$V\left(\frac{1}{n} S_n\right) = E\left(\left(\frac{1}{n} S_n\right)^2\right) - \Big(\underbrace{E\left(\frac{1}{n} S_n\right)}_{=0 \text{ d'après ci-dessus}}\Big)^2$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left(S_n^2\right) = \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + \sum_{k \neq \ell \in \{1,\dots,n\}^2} X_k X_\ell\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n E\left(X_1^2\right) + \sum_{k \neq \ell} E\left(X_k X_\ell\right)\right)$$

(par linéarité,
et du fait que les X_k ont même loi)

$$= \frac{1}{n} V(X_1) + \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq \ell} E(X_k) E(X_\ell)$$

car $E(X_1^2) = V(X_1)$

car X_k, X_ℓ indépendants

$$= \frac{1}{3n} + 0 \quad \left(\text{car } E(X_k) E(X_\ell) = (E(X_1))^2 = 0\right)$$

i.e. $$V\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \frac{1}{3n} = \frac{V(X_1)}{n}$$

Autre méthode.

$$V\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \frac{1}{n^2} V(S_n)$$

or $V(S_n) = V(X_1 + \dots + X_n)$

$= n V(X_1)$ car les $(X_k)_k$ sont ind

donc $V\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \frac{n V(X_1)}{n^2} = \frac{1}{3n}$

3) Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef, pour $Y_n = \frac{S_n}{n}$

$$P\left(\underbrace{|Y_n - E(Y_n)|}_{\left|\frac{S_n}{n}\right|} \geq a\right) \leq \frac{V(Y_n)}{a^2} = \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{a^2} = \frac{1}{3a^2 n} \quad \text{d'après 2)}$$

car $E(Y_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = 0$ d'après (2)

4) Soit $\varepsilon > 0$ Mq $\forall \delta > 0$, $\exists n_\delta \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\delta$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X_1)\right| > \varepsilon\right) < \delta$$

On cherche n_δ tq $\frac{1}{3\varepsilon^2 n_\delta} < \delta$ $\rightsquigarrow$ par ex, $n_\delta := E\left(\frac{1}{3\varepsilon^2 \delta}\right) + 1$

Alors pour $n \geq n_\delta$, d'après 3),

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X_1)\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{3\varepsilon^2 n} \leq \frac{1}{3\varepsilon^2 n_\delta} < \delta$$

donc on a bien $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X_1)\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

5) $|X_1| \leq 1$ donc $|e^{\lambda X_1}| \leq e^{\lambda |X_1|} \leq e^{\lambda}$ par croissance de l'exponentielle

donc $e^{\lambda X_1}$ est bornée, donc intégrable

$$E\left(e^{\lambda X_1}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{\lambda x} \frac{1}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2\lambda} = \frac{\sinh(\lambda)}{\lambda}.$$

6) $\{S_n \geq t\} = \{e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda t}\}$ par croissance de l'exponentielle

donc $P(S_n \geq t) = P(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda t})$

$$\leq \frac{E(e^{\lambda S_n})}{e^{\lambda t}}$$ par l'inégalité de Markov

Mais $E(e^{\lambda S_n}) = E(e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n)}) = E(e^{\lambda X_1} \dots e^{\lambda X_n})$

$= E(e^{\lambda X_1}) \dots E(e^{\lambda X_n})$ car les $(X_k)_k$ sont indépendantes

$= (E(e^{\lambda X_1}))^n$ car les $(X_k)_k$ ont même loi

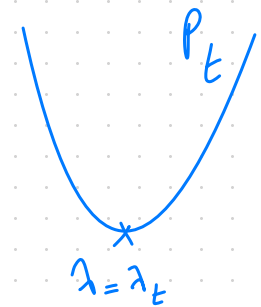
$\leq e^{\frac{\lambda^2 n}{2}}$

donc $P(S_n \geq t) \leq e^{\frac{n\lambda^2}{2} - \lambda t}$ (*)

7) (*) est vrai pour tout $\lambda > 0$. Cherchons $\lambda = \lambda_t$ tq $e^{\frac{n\lambda^2}{2} - \lambda t}$ minimal.

$P_t(\lambda) = \frac{n\lambda^2}{2} - \lambda t$ est un polynôme du second degré

$\left(a\lambda^2 - b\lambda + c, \quad a = \frac{n}{2}, \quad b = -t, \quad c = 0\right)$



Il est minimal quand $\lambda = \frac{-b}{2a} = \frac{t}{n} = \lambda_t$

(on a $P_t'(\lambda) = n\lambda - t$ donc $P_t(\lambda)$ minimal

$\Rightarrow P_t'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{t}{n}$)

On a de plus $P_t(\lambda_t) = \frac{nt^2}{2n^2} - \frac{t^2}{n} = -\frac{t^2}{2n}$

Pour $\lambda = \lambda_t$, on a d'après 6).

$P(S_n \geq t) \leq e^{P_t(\lambda_t)}$, i.e., $P(S_n \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{2n}}$

8) $\forall a > 0$, on a :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant a\right) = P(S_n \geqslant na) + P(S_n \leq -na)$$

$$= 2P(S_n \geqslant na) \quad \text{(par symétrie)}$$

$$\leq 2e^{-\frac{(na)^2}{2n}} \quad \text{d'après 7)}$$

$$\leq \underbrace{2e^{-\frac{na^2}{2}}}$$

CV vers 0 bien plus vite que l'estimée $\leq \frac{1}{3a^2n}$ en 3)

(exponentiellement vite contre polynomialement vite)