Topologie

Espaces métriques

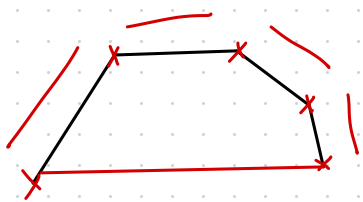
Déf. (distance)

E espace qcq, $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est une distance si

(D1) $\forall x, y \in E \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$

(D2) $\forall x, y \in E \quad d(x,y) = d(y,x)$

(D3) $\forall x, y, z \in E \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (IT)



Déf. espace métrique : (E, d)

E : ens, d : distance

Déf. d_1, d_2 deux distances sur E sont équiv. s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tq

$$\beta d_2(x,y) < d_1(x,y) < \alpha d_2(x,y)$$

ex. ① $E = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) $\quad d(x,y) = |x-y|$

② sur $E = \mathbb{R}$, $\quad x = x_0, x_1, \dots$

$y = y_0, y_1, \dots$

$$D(x,y) = 10^{-p(x,y)} \quad \text{où} \quad p(x,y) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}$$

distance

mais pas équiv. à d en ①

(en fait, $D(x,z) \leq \sup(D(x,y), D(y,z))$)

Déf. Si (E,d), $A \subset E$, la restriction de d à $A \times A$ est une distance sur A

$\rightsquigarrow$ distance induite sur A

Déf. (espace-produit)

Soit $(E_1,d_1), \dots, (E_n,d_n)$ espaces métriques

On a 3 distances équiv sur $E = E_1 \times \dots \times E_n$:

$$x = \underset{\in E}{(x_1, \dots, x_n)}, \qquad y = \underset{\in E}{(y_1, \dots, y_n)}$$

$$\delta_0(x,y) = \sup_{i \in I} d_i(x_i, y_i), \qquad \delta_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$$

$$\delta_2(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)\right]^{1/2}$$

Ex. $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \delta_0, \delta_1, \delta_2$

$\hookrightarrow$ distance euclidienne

Déf. $A \subset \overrightarrow{E}^{e.m}$ est bornée si les distances de A à un point fixe a sont majorées par un nombre fini $r > 0$.

Déf. (e.v.n.)

E ev sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle norme sur E toute fonction $N : E \to \mathbb{R}_+$ t.q.

(N1) $N(x) = 0 \iff x = 0$

(N2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \quad N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$

(N3) $\forall x, y \in E \qquad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

On dit que (E, N) est un e.v.n

Prop. (E, N) e.v.n $\rightsquigarrow$ (E, d) est un e.m où $d(x,y) = N(x-y)$

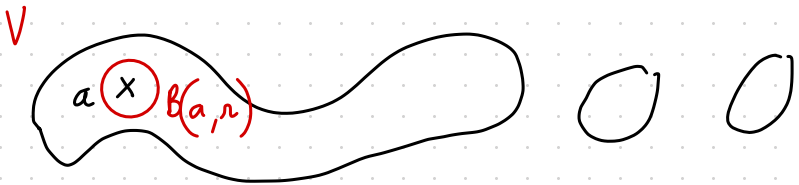
Déf. (E, d) e.m On appelle boule ~~ouverte~~ fermée de centre $a \in E$ et rayon $r > 0$ l'ensemble $B(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) < r\}$

$\overline{B}(a,r)$ $\leq$

La sphère de centre a et rayon r $= S(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) = r\}$

Déf. (E, d) e.m, $a \in E$

U est un voisinage de a si $U \supset B(a,r)$, $r > 0$



Prop. dans un esp m., chaque voisinage de a contient a ;
l'int de tous les voisinages de a se réduit à $\{a\}$

dém. $\forall r > 0$, $B(a,r) \supset \{a\}$

$$\bigcap_{r>0} B(a,r) = \{x \in E \text{ t.q. } d(x,a) < r \text{ pour tout } r\} = \{x \text{ t.q. } \underbrace{d(x,a)}_{=0}\}$$
$$= \{a\}$$

Prop. l'int de 2 voisinages de a est un voisinage de a.
(ens fini de)

dém. $(V_i)_{1 \le i \le n}$ vois de a $\forall i$, $B(a,r_i) \subset V_i$, $r_i > 0$.

donc $B(a,r) \subset V_i$, $\forall i$ $r = \min(\{r_i\}_i) > 0$

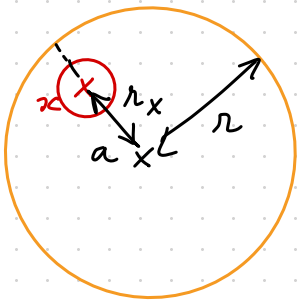
$$\Rightarrow \bigcap_i V_i \supset B(a,r) \quad \blacksquare$$

Déf. Soit (E,d) e m, on dit que $O \subset E$ est <u>ouvert</u> si $\forall x \in O$, $\exists r > 0$ t.q. $B(x,r) \subset O$

$F \subset E$ est **fermé** si $E \setminus F$ est ouvert

Prop. Dans un espace métrique qcq, les boules ouvertes sont des ouverts (a)
fermées ——— fermés (b)

dém. (a) $x \in B(a,r)$, $a \in E$ e m, $r > 0$



$$r_x := d(a,x) < r$$

$$r' := \frac{1}{2}(r - r_x) > 0.$$

Par I.T., $\forall y \in B(x,r')$,

$$d(a,y) \leq \underbrace{d(a,x)}_{r_x} + \underbrace{d(x,y)}_{< \frac{1}{2}(r - r_x)} < \frac{1}{2}(r + r_x) < r$$

(b) $A = \left(\overline{B}(a,r)\right)^c$ $\quad a \in E$, $r > 0$

$\forall x \in A$, $\rho = d(a,x) - r > 0$

et $d(a,y) \geq d(a,x) - d(x,y)$ (I.T.)

$\Rightarrow \forall y$ t.q. $d(x,y) < \rho \Rightarrow d(a,y) > r$

donc $B(x,\rho) \subset A$ donc A est un voisinage de x

ex tout intervalle ouvert (fermé) de $\mathbb{R}$ est un ensemble ouvert (fermé)

Prop. la réunion d'une famille qcq d'ouverts est ouverte

dém. $(O_i)_{i \in I}$ ouverts $\quad x \in \bigcup_{i \in I} O_i \Leftrightarrow \exists i$ t.q. $x \in O_i$

mais $\exists r_i > 0$ t.q. $B(x, r_i) \subset O_i$ d'où $B(x, r_i) \subset \bigcup_{j \in I} O_j$

Prop. l'int d'une famille qcq de fermés est fermée

dém. $\left(\bigcap_{i\in I} \underbrace{F_i}_{\text{fermés}}\right)^c = \bigcup_{i\in I} \underbrace{F_i^c}_{\text{ouvert}}$ ouvert ∎

Prop. l'int d'une famille finie d'ouverts est ouverte

dém. $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{O_i}_{\text{ouverts}} \iff x \in O_i$ pour tout i

O_i ouvert. $\exists\, r_i > 0$ t.q. $B(x, r_i) \subset O_i$

En particulier, $r = \min_{i\in[\![1,\dots,n]\!]} (r_i) > 0$

$\Longrightarrow B(x, r) \subset O_i \quad \forall i$ ∎

Prop une réunion finie de fermés est fermée

Espace topologique

Déf. E ens. Une structure topo sur E = ensemble $\mathcal{O}$ de parties de E appelées ensembles ouverts de E, t.q.

(O1) réunion d'une famille qcq d'ouverts est un ouvert

(O2) int de 2 ensembles ouverts est un ensemble ouvert

(O3) les ensembles $E, \emptyset$ sont ouverts

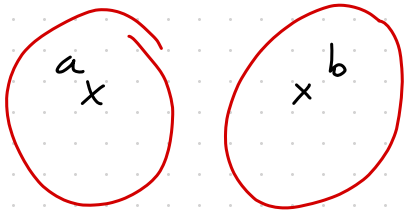
Déf. On dit que $V \subset E$ est un voisinage de $a \in E$ si $V \supset O \ni a$, $O \in \mathcal{O}$

Prop. Un ensemble est ouvert $\iff$ il est 1 voisinage de chacun de ses points.

Déf. On dit que $F \subset E$ est <u>fermé</u> si $E \setminus F$ est ouvert.

Déf. Un espace topo est séparé s'il vérifie l'axiome de Hausdorff :

(H) $\forall a, b$ avec $a \neq b$, $\exists$ vsn de a et un vsn de b sans point commun.



ex. Sur un espace métrique (E, d), la structure topologique définie par les ouverts est séparée

Déf. Un espace top E est <u>métrisable</u> s'il existe d distance sur E tq la top. associée à d coïncide avec la topologie donnée

Déf. $A \subset E$ e top, $A \neq \emptyset$

La top. induite sur A (par la top sur E) est la structure topologique dont les ouverts sont les traces sur A des ouverts de E (les $O \cap A$, $O \in \mathcal{O}$)

Adhérence, intérieur ..

Déf. E e top., $A \subset E$

On dit que $a \in A$ est int à A s. A est un voisinage de a ;

$\mathring{A} = \{ a \in A$ int à $A \}$ est l'int de A

Prop. $\mathring{A}$ est ouvert et c'est le plus grand ouvert $\subset A$

dém. ① $\forall a \in \mathring{A}$, $\exists U$ ouvert $\ni a$ t.q. $U \subset A$

Chaque point de U est intérieur à A donc $\mathring{A} \supset U$

$\Rightarrow$ c'est un voisinage de a, donc $\mathring{A}$ est ouvert.

② Inversement, soit O ouvert contenu dans A

Chaque point de O est intérieur à A donc $O \subset \mathring{A}$ ∎

Déf. E un espace top. On dit que a est adhérent à un ensemble A s. chaque voisinage de a rencontre A

L'ensemble des pt adhérents à A est l'adhérence (fermée) $\overline{A}$ de A

Prop. L'adhérence $\overline{A}$ est fermée ; c'est le plus petit fermé contenant A.

dém.. Soit $B = A^c$ la relation $a \notin \overline{A} \iff \exists$ un voisinage de a ne rencontrant pas A

$\iff a$ est intérieur à $A^c = B$

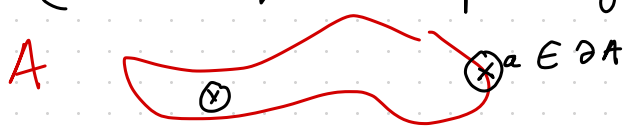
donc $\overline{A}^c = \mathring{B}$ donc $\overline{A}$ fermée.

De plus si F fermé $\supset A$, le complémentaire de F est un ouvert contenu dans B

donc est contenu dans $\mathring{B}$

donc $F \supset (\mathring{B})^c = \overline{A}$ ∎

Déf. Dans un esp. top. on dit que a est un point frontière de A ($a \in \partial A$) si chaque voisinage de a rencontre A et A^c.



Prop. Si A est une partie bornée de $\mathbb{R}$, la borne sup et la borne inf de $A \subset \mathbb{R}$ sont des points dans ∂A

Déf. Soient E esp. t. séparé, $A \subset E$

1. $a \in A$ est isolé si $\exists V$ vsn de a t.q. $\{a\} = A \cap V$
2. $a \in E$ est point d'accumulation de A si chaque vsinage de a contient une infinité de points de A.

Prop. Soit A partie d'un esp. top séparé E

a est un point d'acc de A $\iff$ chaque vsin. V de a contienne au moins distinct de a.

dém. nécessaire ✓

suffisant. par l'absurde, on suppose que $\exists V$ vsn de a t.q. $V \cap A$ fini.

On note $a_1, \dots, a_n$ les points communs à A et $V \setminus \{a\}$

E séparé $\Rightarrow \exists V_i$ voisinage de a ne contenant pas a_i $\forall i = 1, \dots, n$

Alors $U = V \cap V_1 \cap \dots \cap V_n$ voisinage de a

tq $A \cap U$ soit vide soit réduit à $\{a\}$. adhérence $\blacksquare$

Limites de suites

Déf. $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, E e t

(x_n) CV vers a si $\forall$ vois V de a, $\exists n_V \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_V$,

$$x_n \in V$$

Déf. E e t, $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$

$(x_n)_n$ a comme v-lim d'adhérence $a \in E$ si $\forall$ voisinage V de a

$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in V\}$ est ∞

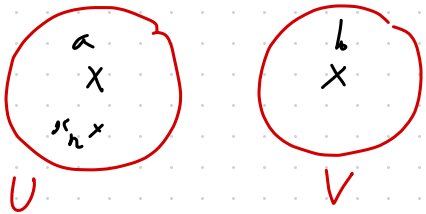
Prop : • E est séparé

Toute suite a au plus 1 limite

• une suite CV a une seule valeur d'adhérence qui est la limite

dém.

(x_n) tend vers a, b, $a \neq b$



$a \in U$
$b \in V$

$U \cap V = \emptyset$

$a = \lim_n x_n$. $\exists\, n_U$ tq $x_n \in U$ pour $n \geq n_U$

$b =$ ——— $\exists\, n_V$ ——— V ——— n_V

Prop : (E, d) métrique $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ CV vers $a \in E$

$\iff \left(d(x_n, a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \right)$

dém. nécessaire. les boules $B(a,\varepsilon)$ sont des vsn. de a

donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ t.q. $n \geq n_\varepsilon$, $x_n \in B(a,\varepsilon)$

i.e. $d(x_n, a) < \varepsilon$

Suffisante. chaque voisinage V de a, $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B(a,\varepsilon) \subset V$ ∎

Thm. Dans un espace, les valeurs d'adhérence d'une suite (x_n) sont les limites des sous-suites extraites de (x_n)

dém. (1) $(x_{\varphi(n)})_n \longrightarrow a$

Chaque voisinage de a contient $x_{\varphi(n)}$ pour $n \gg 1$,

donc a est une valeur d'adhérence de (x_n).

(2) soit a valeur d'adhérence de (x_n)

Partant de $q_0 = 0$ nous (q_n) suite $\nearrow$ d'entiers t.q.

$(x_{q_n})_n$ CV vers a

En effet $\exists$ infinité de $p \in \mathbb{N}$ t.q. $x_p \in B\left(a, \frac{1}{n+1}\right)$

si q_n est constant on choisit $q_{n+1} > q_n$ dans

donc $d\left(a, x_{q_{n+1}}\right) < \frac{1}{n+1}$ donc (x_{q_n}) CV vers a ∎

Thm. $A \subset E$, E em

A fermé $\iff$ les limites de suites CV de pts de A appartient à A

Suites de Cauchy

Déf. (E,d) e m (x_n) est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon > 0$ t.q. $n, p \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_p) < \varepsilon$.

Thm.

- Toute suite CV est de Cauchy
- toute suite de Cauchy est bornée
- soit (x_n) suite de Cauchy admettant au moins une valeur d'adhérence a

Alors $(x_n) \to a$ donc a est sa valeur d'adhérence

$\hookrightarrow$ $\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon$ t.q. $n, p > n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_p) < \frac{\varepsilon}{2}$

Comme a est une valeur d'adhérence de (x_n),

$\exists\, p > n_\varepsilon$ t.q. $x_p \in B(a, \frac{\varepsilon}{2})$

$\Rightarrow n > n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$ ∎

Déf. un espace métrique est dit <u>complet</u> si ttes suites de Cauchy CV

Thm. $A \subset E$, (E,d) esp métrique

Pour que A soit complet il est nécessaire que A soit fermé

C suffisante si E est complet

dém. a) Si A non fermée, $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ CV vers $a \in E \setminus A$

La suite (x_n) est de Cauchy donc CV car A est complet

mais sa limite $a \notin A$ absurde

b) E complet A fermé, $A \subset E$

$(x_n)_n$ de Cauchy dans A E complet donc (x_n) CV vers $x \in E$

Mais $x_n \in A$ $\forall n$, et A fermé donc $\lim_n x_n \in A$

donc $(x_n) \xrightarrow[n]{} x \in A$ ∎

Thm. $(E_1, d_1) \times \cdots \times (E_n, d_n)$ munido de $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ está completo

$\hookrightarrow$ e m. completo

<u>Ex.</u> $\forall n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ está completo

Déf..

Soit E ensemble, $A \subset E$. On dit que $\mathcal{R} = (X_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$ famille de parties de E recouvre A si $\bigcup_{i \in I} X_i \supset A$.

(c'est un recouvrement de A)

$\mathcal{R}$ est ouvert si les X_i sont tous ouverts.

Déf.. (espace compact)

Un espace topologique est compact s'il est séparé et vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue.

(BL) De tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un recouvrement fini,

i.e. $\forall \mathcal{R} = (U_i)_{i \in I}$ recouvrement ouvert de E, $\exists J \subset I$ fini t.q $\bigcup_{j \in J} U_j \supset E$.

Une partie $A \subset E$ d'un espace topologique E est dite compacte si A est un espace topologique compacte pour la topologie induite

Rque. $A \subset E$ espace topologique. Ouverts (relatifs) de A sont les $U \cap A$, U ouvert de E.

Donc à chaque recouvrement (relatif) de A correspond un recouvrement de A par des ouverts de E et inversement

$\rightsquigarrow$ $A \subset E$ compact $\iff$ $\forall$ recouvrement de A par des ouverts de E, on peut extraire un recouvrement fini

Thm. $f : \underset{\text{esp compact}}{E} \longrightarrow \underset{\text{esp top. séparé}}{F}$. Si f est C^0 alors $f(E)$ est compact

dém. $(G_i)_{i \in I}$ recouvrement ouvert de $f(E)$

f C^0 $\Rightarrow$ $f^{-1}(G_i)$ ouvert $\forall i$, et $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i)$ recouvrement ouvert de E

E compact $\Rightarrow$ $\exists J \subset I$ fini t.q. $\bigcup_{j \in J} f^{-1}(G_j) \supset E$

$\Rightarrow$ $(G_j)_{j \in J}$ recouvrement fini de $f(E)$ $\blacksquare$

Prop. E sp. top séparé E est cpct $\Leftrightarrow$ $\forall (F_i)_{i\in I}$ famille d'ens fermés de E t.q. $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, $\exists J \subset I$ fini t.q. $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$

dém. $E = \Big(\underbrace{\bigcap_{i\in I} F_i}_{\emptyset}\Big)^c = \bigcup_{i\in I} \underbrace{F_i^c}_{\text{ouvert}}$ donc (E cpct) $\exists J \subset I$ fini t.q.

$$\bigcup_{j\in J} F_j^c = E \quad \text{et alors} \quad \bigcap_{j\in J} F_j = \Big(\bigcup_{j\in J} F_j^c\Big)^c = \emptyset \qquad \blacksquare$$

Thm. $A \subset E$, E sp top séparé.

a) A compact $\Rightarrow$ A fermé

b) Si E est compact, A compact $\Leftrightarrow$ A fermé

dém. a) E espace top séparé $\Rightarrow$ $\forall a \in E$, $\bigcap_{F\in \mathcal{F}_a} F = \{a\}$.

voos. fermés de a

(En effet, $\forall x \neq a$, $\exists\, U$ vois ouvert de a t.q. $U \cap V = \emptyset$
V ——— x

Alors $E \setminus V$ est un vois fermé de a et $x \notin E \setminus V$)

Supposons que $A \subset E$ est compacte et pas fermé. Alors $\exists\, a \in \bar{A}$ t.q. $a \notin A$

Par ce qui précède $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_a} (F \cap A) = \{a\} \cap A = \emptyset$

A cpct $\Rightarrow \exists\, (F_j)_{j \in J}$ famille finie de voisinages fermés de $\{a\}$ t.q.

$$\underbrace{\bigcap_{j \in J} (F_j \cap A)}_{= \left(\bigcap_{j \in J} F_j\right) \cap A} = \emptyset$$

Mais alors $\bigcap_{j \in J} F_j$ voisinage fermé de $a \in \bar{A}$

donc $\left(\bigcap_{j \in J} F_j\right) \cap A \neq \emptyset$ absurde

b) E compact, A fermé ou les parties fermées de A sont les $F \cap A$
↳ fermé de E

donc $\emptyset = \bigcap_{i \in I} (F_i \cap A) = \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \cap A$

$\Rightarrow \exists\, J \subset I$ fini t.q. $\bigcap_{j \in J} (F_j \cap A) = \emptyset$. ■

Corollaire. f bijection continue de E sp compact sur F sp compact.

Alors f^{-1} est continue, i.e., f est un homéomorphisme

dém. m.q. $g = f^{-1}$ est C^0 $\quad$ Il suffit de m.q. $\forall A$ fermé de E, $g^{-1}(A)$ fermé

$g : F \to E$

Mais $g^{-1}(A) = f(A)$ est compact car A fermé de E compact + f C^0

donc $g^{-1}(A)$ est fermé ■

exemple. $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ sphère est compacte.

$\Rightarrow$ Toute bij C^0 d'une sphère sur une sphère est un homéo

Thm : tout espace compact E vérifie l'axiome de Bolzano-Weierstrass.

(BW) Toute suite de points de E admet au moins une valeur d'adhérence

dém. supposons qu'$\exists\ (x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ sans point d'adhérence

$\Rightarrow$ $X_0 := \{x_n\}_n$ est fermé $\quad \left(\overline{X_0} = X_0 \cup \{\text{valeurs d'adhérences de } X_0\} \right)$

De même, $\forall\ p \geq 0$, $X_p := \{x_n\}_{n \geq p}$ est fermé

Or $\bigcap_{p=0}^{+\infty} X_p = \emptyset$ (car un point dans cette int serait une valeur d'adhérence).

X_p fermé et E compact $\Rightarrow$ $\exists\ k \geq 0$ tq $\bigcap_{p=0}^{k} X_p = \emptyset$

Mais $\bigcap_{p=0}^{k} X_p = \{x_k, x_{k+1}, \dots\} \neq \emptyset$, absurde ∎

Rque. surtout utile si E est un espace métrique (ou plus généralt quand tout point de E admet une base dénombrable de voisinages), car (BW) $\Rightarrow$ toute suite admet une ss-suite CV.

De plus, dans le cas des espaces métriques, (BL) $\Leftrightarrow$ (BW).

Thm. pour qu'un espace métrique E soit compact, il faut et il suffit qu'il vérifie.

(S) De chaque suite de points de E on peut extraire une suite CV.

dém. $\boxed{\Rightarrow}$ déjà vu

$\boxed{\Leftarrow}$ Remarquons que E est séparé. On a le lemme.

Lemme. Soit E espace métrique vérifiant (S) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un recouvrement de E par une famille finie de boules de rayon ε

dém. Supposons qu'$\exists\ \varepsilon > 0$ t.q. ce ne soit pas vrai

Soit $x_0 \in E \rightsquigarrow \exists\ x_1 \in E \setminus B(x_0, \varepsilon)$

$\rightsquigarrow \exists\ x_2 \in E \setminus \left(B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon)\right)$

$\vdots$

$\rightsquigarrow \exists\ x_n \in E \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} B(x_i, \varepsilon)$

$\vdots$

$\Rightarrow \forall\, n \neq p,\ d(x_n, x_p) > \varepsilon$

donc $\forall \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow$, $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ pas de Cauchy donc pas CV ce qui contredit (S). ∎

Lemme. Si E esp. métrique vérifiant (S) et $(O_i)_{i \in I}$ recouvrement ouvert de E, $\exists\, r > 0$ t.q. $\forall x \in E$, $\exists\, i \in I$ t.q. $B(x, r) \subset O_i$

dém. Si un tel r n'existe pas alors $\exists\, (x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ t.q

$B(x_n, \frac{1}{n})$ ne sont pas contenus dans aucun des O_i

Extrayons $(x_{\varphi(n)})_n$ CV vers a $\Rightarrow \exists\, i_0 \in I$ t.q $a \in O_{i_0}$

Mais O_{i_0} est ouvert donc contient $B(x_{\varphi(n_0)}, \frac{1}{\varphi(n_0)})$ pour n_0 assez grand, absurde ∎

Rque. un tel $r > 0$ est appelé nombre de Lebesgue du recouvrement

fin de la dém de (BL) $\Leftrightarrow$ (BW).

Supposons que l'espace (E,d) vérifie (S) et soit $(O_i)_{i\in I}$ recouvrement ouvert quelconque de E

Soit $r>0$ un nombre de Lebesgue de ce recouvrement

D'après le lemme précédent, $\exists \left(B(x_k,r)\right)_{k=1,\dots,n}$ recouvrement fini de E

Mais $\forall k$, $B(x_k,r) \subset O_{i(k)}$ pour $i(k) \in I$

donc $\bigcup_{k=1}^{n} O_{i(k)} \supset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,r) = E$ est un recouvrement ouvert fini de E extrait de $(O_i)_{i\in I}$ ∎