Suites et séries de fonctions

E, F espaces métriques, $(f_n)_n$ suite d'appl de E dans F.

Si $\forall x \in E$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$ existe, que dire de f ?

$$\left(f_n \begin{matrix} C^0 \\ C^1 \end{matrix} \Rightarrow f \begin{matrix} C^0 ? \\ C^1 ? \end{matrix} \quad \text{etc} \right)$$

$\rightsquigarrow$ CV simple, CV uniforme ...

Cf : $f_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $u_k : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \text{ou } \mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{matrix}$, $\rightsquigarrow$ série de fonctions

$\rightsquigarrow$ CV normale ...

1) CV simple & CV uniforme

X ensemble, (E,d) espace métrique, $(f_n)_n$ suite t.q. $f_n : X \to E$ $\forall n \geq 0$.

Déf. $(f_n)_n$ CV simplement (CVS) vers $f : X \to E$ si $\forall x \in X$, $(f_n(x))_n$ CV vers $f(x)$ dans E, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geq N_{\varepsilon,x} \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

f = lim simple de $(f_n)_n$

Déf. (f_n) CV uniformément (CVU) vers $f : X \to E$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall x \in X,\ n \geq N_{\varepsilon} \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

f = lim unif de $(f_n)_n$

Rque. CVU $\Rightarrow$ CVS

ex. ① $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$$

$(f_n)_n$ CVU vers $x \mapsto 0$

$$\left(\forall \varepsilon > 0,\ n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon \right)$$

② $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{n+x}.$$

(f_n) CVS vers $x \mapsto 0$, mais CVU seult sur parties bornées

car $|f_n(x)| \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} x$

donc $\forall A \subset \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in A$

$$\iff n \geq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} x_A \text{ où } x_A = \sup A.$$

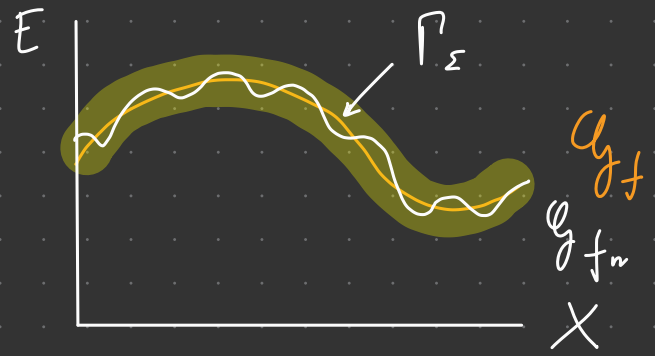
possible que si A est borné

Interpr à l'aide de graphes :

$f_n : X \to E$, $(f_n)_n$ CVS vers f

$(f_n)_n$ CVU vers $f \iff \mathcal{G}_{f_n} = \{(x, f_n(x)), x \in X\}$

$$\subset \Gamma_\varepsilon = \{(x,y) \in X \times E \,.\, d(y, f(x)) < \varepsilon\}$$



Rque. $(f_n)_n$ CVU vers f $\iff$ $(m_n)_n \to 0$, où

$$m_n := \sup_{x \in X} d\left(f_n(x), f(x)\right)$$

ex. • $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x e^{-nx}$ CVU vers $x \mapsto 0$.

$$\left(f_n'(x) = (1 - nx) e^{-nx} \rightsquigarrow m_n = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne} \right)$$

- $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto n^{\alpha} x e^{-nx} \quad , \quad \alpha \geq 0$$

(f_n) CVS vers $x \mapsto 0$

$$m_n = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

(f_n) CVU <u>ssi</u> $n^{\alpha-1} \xrightarrow[n]{} 0 \iff \alpha < 1.$

- $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CVS vers $x \mapsto 0$

$$x \mapsto \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$$

max pour $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}$ donc $\cancel{\text{CVU}}$

Rque. $f_n : X \to E$, $(E, \|\cdot\|)$ esp vect normé

a) (f_n) CVU vers $\underline{0}$. $x \mapsto 0$

$\iff \exists (\varepsilon_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ tq. $\varepsilon_n \xrightarrow[n]{} 0$ et $\forall x \in X$, $\|f_n(x)\| \leq \varepsilon_n$

b) (f_n) $\cancel{\text{CVU vers } \underline{0}}$

$\iff \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tq $(f_n(x_n)) \not\xrightarrow[n]{} 0$.

dém. $m_n := \sup_x \|f_n(x)\|$

a) $m_n \leq \varepsilon_n \Rightarrow m_n \xrightarrow[n]{} 0$

b) $m_n \geq \|f_n(x_n)\| \Rightarrow m_n \not\xrightarrow[n]{} 0$

ex :

1) $f_n(x) = e^{-nx} \sin x, \quad x \geq 0$

$|f_n(x)| \leq e^{-nx} x$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} xe^{-nx} = \underbrace{\frac{1}{ne}}_{\varepsilon_n} \to 0$

2) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ (f_n) CVS vers $\underline{0}$, mais pour $x_n = \frac{\pi}{2n}$

$f_n(x_n) = \frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \not\xrightarrow[n]{} 0 \Rightarrow (f_n) \not\text{CVU}$

Prop. (critère de Cauchy)

$(f_n)_n$ suite, $f_n : X \to (E,d)$ espace métrique

1) $(f_n)_n$ CVU $\Longrightarrow$ $\left[\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon > 0 \text{ t.q. } n \geq N_\varepsilon,\ p \geq N_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in X,\ d(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon\right]$

$\hookrightarrow (f_n)_n$ unif de Cauchy

2) Si E est complet, $\Longleftrightarrow$

(en part pour $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

dém. 1) (f_n) CVU vers f $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $n,p \geq N_\varepsilon \Rightarrow$

$$d(f_{\underset{p}{n}}(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow d(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon$$

2) Si , $\forall x \in X$, $(f_n(x))_n$ de Cauchy $\Rightarrow$ CV vers $f(x) := \lim_n f_n(x)$

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q $n, p > N_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in X,\ d(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon$.

$p \to +\infty \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon, \forall x \in X$ ∎

Intégrale fonctionnelle :

X ens, (E,d) esp métrique, $\mathcal{B}(X,E) = \{f : X \to E, \text{ bornée}\}$

D dist sur $\mathcal{B}(X,E)$.

$$D(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

$(\mathcal{B}(X,E), D)$ est un espace métrique complet

$\rightsquigarrow$ $(f_n)_n$ CVU vers f $\iff$ $\underset{\overset{\parallel}{m_n}}{D(f, f_n)} \longrightarrow 0$

$\iff$ $(f_n)_n$ CV^n vers f dans $(\mathcal{B}(X, E), D)$

et (f_n) uniq de Cauchy $\iff$ $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $(\mathcal{B}(X, E), D)$.

2) Limite uniforme de fonctions C^0

Thm. E, F esp métriques, $(f_n)_n$ suite $f_n : E \to F$ unif^t CV

Si $\forall n$, f_n est C^0 en $a \in E$, alors f est C^0 en a.

dém. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $\forall x \in E$, $d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$

f_n C^0 en a $\Rightarrow \exists V$ vois de a tq $x \in V \Rightarrow d(f_n(x), f_n(a)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$$\overset{x \in V}{\Rightarrow} d(f(x), f(a)) \leq \underbrace{d(f(x), f_n(x))}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(f_n(x), f_n(a))}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(f_n(a), f(a))}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}$$

$$\leq \varepsilon$$

$\blacksquare$

Cor. $(f_n)_n$ CVU, f_n C^0 $\forall n$

$\Rightarrow f := \lim_n f_n$ est C^0

ex. 1) $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-nx}$ CVS vers $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ si $x = 0$, 0 si $x > 0$

$\forall n$, f_n C^0 mais f $\cancel{C^0}$ donc $\cancel{(f_n)_n \text{ CVU}}$.

2) idem pour $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+nx^2}$

Rque. E, F esp métriques,

$$C_b^0(E,F) = \{ f : E \to F,\ f\ C^0 \text{ et bornée} \}$$

rés précédent $\rightsquigarrow$ $C_b^0(E,F)$ est une partie fermée de $(\mathcal{B}(E,F), D)$

(Si F est complet, $(\mathcal{B}(E,F), D)$ est complet
et $(C_b^0(E,F), D)$ est complet)

Prop. E, F esp métriques, $(f_n)_n$ t.q. $f_n : E \to F$ C^0
f_n CVS vers $f : E \to F$
et CVU sur tout $K \subset E$ compact

Alors f est C^0 sur E

<u>dém.</u> $\forall K \subset E$ compact, $f|_K$ est C^0 $\blacksquare$

ex. 1) $f_n(x) = \dfrac{x}{n+x}$, $x \geq 0$

CVU vers $\underline{0}$ sur toute partie compacte de $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow$ limite C^0

2) $f_n(x) = e^{-nx}$, $x \geq 0$

$A \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ compact

$\Rightarrow a = \inf A > 0$

$\forall x \in A$, $x \geq a \Rightarrow e^{-nx} \leq \underbrace{e^{-na}}_{\varepsilon_n}$

$\rightsquigarrow$ CVU sur A et lim C^0

Double passage à la limite

Prop. E, F esp métriques, $A \subset E$, $(f_n)_n$, $f_n : A \to F$ CVU vers $f : A \to F$

Soit a est un pt d'accumulation de A tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \in A}} f_n(x)$ existe

Si F est complet, $(b_n)_n$ a une limite $b = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \in A}} f(x)$, i.e.,

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{\substack{x \to a \\ \in A}} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ \in A}} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

dém. • si $a \in A$, f_n est C^0 en a $\forall n$

$$\overset{\text{CVU}}{\Longrightarrow} f \text{ est } C^0 \text{ en } a$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \in A}} f_n(x)}_{f_n(a)} = f(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \in A}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \in A}} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

• Si $a \notin A$, posons $B = A \cup \{a\}$.

On prolonge f_n en $g_n : \begin{array}{l} B \to F \\ x \mapsto \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in A \\ b_n & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$

(f_n) suite de Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\begin{array}{l} n \geq N_\varepsilon \\ p \geq N_\varepsilon \end{array}$

$$\Longrightarrow d(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon, \forall x \in A.$$

$$\rightsquigarrow \quad d\big(g_n(a), g_p(a)\big) \leq \varepsilon \qquad (x \to a)$$
$$= d(b_n, b_p)$$

$\Rightarrow \big(b_n = g_n(a)\big)_n$ de Cauchy donc CV, vers $b = \lim_n b_n$.

De plus, $d\big(g_n(x), g_p(x)\big) \leq \varepsilon, \quad \forall x \in B$

i.e., $(g_n)_n$ unif CV vers g. $\quad x \mapsto g(x) = f(x) = \lim_n f_n(x), x \in A$

$g(a) = b, \quad x = a$

Alors g est C^0 en a et donc $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = g(a) = b$

$\blacksquare$

3) Limites de fonctions dérivables

ex. $f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

$(f_n)_n$ CVS vers $f : x \mapsto |x|$

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \leq \sqrt{\left(|x| + \frac{1}{n}\right)^2} = |x| + \frac{1}{n}$$

d'où $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (f_n)_n$ CVU vers f.

Mais f_n C^∞ sur $\mathbb{R}$

& f pas dérivable en 0

Thm. E e v n., $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $(f_n)_n$, $f_n : I \to E$ derivable

(f_n) CVS vers $f : I \to E$.

Alors f derivable sur I $\iff$ $(f_n')_n$ CVU sur I, et alors

$$f'(x) = \lim_n f_n'(x), \quad \forall x \in I$$

i.e $\frac{d}{dx} \lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{d}{dx} f_n(x)$, $\forall x \in I$.

dém. Soit $x_0 \in I$ $\rightsquigarrow$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $\varphi_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$

$$\varphi(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et $\varphi_n(x_0) := f_n'(x_0)$, $\varphi(x_0) = \lim_n f_n'(x_0)$

$\rightsquigarrow$ φ_n dif sur I, C^0 en x_0 et CVS vers φ sur I

Pour m.q. f admet $\varphi(x_0) = \lim_n f_n'(x_0)$ comme dérivée en x_0,

il suffit de m.q. φ est C^0 en x_0

Pour cela, m.q. φ_n CVU vers φ sur I

- Accroissements finis : $\frac{1}{x-x_0}\left[f_n(x) - f_p(x) - \left(f_n(x_0) - f_p(x_0)\right)\right] = f_n'(y_x) - f_p'(y_x)$

$y_x \in I$.

$$\Longrightarrow \quad |\varphi_n(x) - \varphi_p(x)| \leq \sup_I |f_n' - f_p'|$$

(f_n') CVU sur I $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $n, p \geq N_\varepsilon$

$$\Rightarrow \sup_I |f_n' - f_p'| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_I |\varphi_n - \varphi_p| \leq \varepsilon$$

$p \to +\infty \Rightarrow \sup_I |\varphi_n - \varphi| \leq \varepsilon$, i.e. (φ_n) CVU vers φ sur I.

$\blacksquare$

<u>ex</u>. $a > 0$. $f_n|_{[a, +\infty[}$ où $f_n : x \mapsto e^{-nx}$

$\hookrightarrow$ CVU vers $\underline{0}$ et $f_n' : x \mapsto -n e^{-nx}$ CVU vers $\underline{0}$

On a bien $\lim_{n \to +\infty} f_n'(x) = f'(x)$, $\forall x \in [a, +\infty[$

Prop. E e v n. complet, $I \subset \mathbb{R}$ int

$(f_n)_n$ suite d'appl. dér de I dans E t q

$(f_n')_n$ CVU sur I si $\exists\, x_0 \in I$ t.q. $(f_n(x_0))$ CV

alors $(f_n)_n$ CVU sur toute partie bornée de I.

<u>dém.</u> $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $n, p \geq N_\varepsilon$

$$\Longrightarrow \forall x \in I \quad \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \|f_n(x_0) - f_p(x_0)\| + \varepsilon\, |x - x_0|$$

$A \subset I$ bornée, $d := \sup_{x \in A} |x - x_0|$

$\exists\, N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $n, p \geq N'_\varepsilon \Rightarrow \|f_n(x_0) - f_p(x_0)\| \leq \varepsilon$

$$\overset{n,p \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)}{\Longrightarrow} \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon\,(1 + d).$$ Cauchy. ∎

4) Séries de fonctions

Déf. X ens, E e.v.n, $(u_n)_n$, $u_n : X \to E$

$$S_n : X \to E$$
$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

Si (S_n) CVS sur X, on dit que $\sum_n u_n$ CVS sur X

Si (S_n) CVU sur X, on dit que $\sum_n u_n$ CVU sur X

Thm. $(u_n)_n$, $u_n : X \to E$.

Si $\sum_n u_n$ CVU sur X et $\forall n$, u_n est C^0 en $a \in X$ sur X

alors $\sum_n u_n$ est C^0 en $a \in X$ sur X

ex. $\forall \lambda \in [0,1[$, $S : z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ CVU sur $\overline{D_\lambda} := \{z \in \mathbb{C} \,.\, |z| \leq \lambda\}$,

$$= \frac{1}{1-z}$$

et $\left| S(z) - S_n(z) \right| = \left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$

$(\Rightarrow S \ C^0)$

Prop. X esp métrique, $A \subset X$, $(u_n)_n$, $u_n : X \to E$ e.v.n complet t.q. $\sum u_n$ CVU

$\forall a$ point d'acc. de A, t.q. $\forall n$, $v_n = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} u_n(x)$ existe,

on a . $\sum v_n$ CV vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$,

- $S = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \in A}} S(x) \ldots \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$

i.e., $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{x \to a \\ \in A}} u_n(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ \in A}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$

<u>dém</u>. On considère $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ et on applique le rés pour les suites de fct ∎

ex $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ CVU sur $\mathbb{R}$

et $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2+n^2} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2} = 0.$

Dérivation terme à terme

Thm. $I \subset \mathbb{R}$ intervalle

$(u_n)_n$, $u_n : I \to E$ dérivable evn, $\sum_n u_n$ CVS

Si $\sum_n u_n'$ CVU sur I, alors

$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est dérivable sur I, et

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x), \quad \forall x \in I$$

i.e. $$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} u_n(x).$$

<u>dém</u>. Corollaire des rés pour les suites de fonctions ∎

Prop. $(u_n)_n$, $u_n : I \to E$
$\hookrightarrow$ evn complet

t.q. u_n dérivable et $\sum u_n'$ CVU sur I

Pour que $\sum u_n$ CVS sur I, il suffit que $\exists\, x_0 \in I$,
t.q. $\sum_n u_n(x_0)$ CV, et

et alors $\sum_n u_n$ CVU sur toute partie bornée de I

ex. $I = [-k, k]$, $k < 1$, $E = \mathbb{R}$.

$$u_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} \qquad (t \in I,\ n \geq 0)$$

$$\sum_n u_n'(t) = \sum_n t^n \quad \text{CVU sur } I$$

et pour $t=0$, $\sum_n u_n(0)$ CV.

$\Rightarrow$ $\sum u_n(t)$ CVU sur I, et sa somme $S(t)$ vérifie

$$S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = 0$$

$$S'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(t) = \frac{1}{1-t}$$

d'où $S(t) = -\log(1-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$, $t \in]-1,1[$.

5) Convergence uniforme / normale des séries

Prop. (critère de Cauchy)

$(u_n)_n$ suite d'appl de X dans E evn

Pour que $\sum u_n$ CVU sur X, il faut que $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall x \in X$, $\forall p > n \geq N_\varepsilon$,

$$|u_{n+1}(x) + \dots + u_p(x)| \leq \varepsilon$$

Cond. nec et suffisante si E est complet (en part si E est de dim finie)

<u>dém</u> cond $\Leftrightarrow$ $(S_n)_n$ unif de Cauchy $\blacksquare$

Convergence normale

Déf. $(u_n)_n$ suite d'appl de X dans e.v.n E

$\sum u_n$ est normalement convergente (CVN) sur X s'il existe

$\sum v_n$ série numérique CV t.q $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$,

$$\|u_n(x)\| \leq v_n.$$

Thm E e.v.n complet Pour que $(u_n)_n$, $u_n : X \to E$ satisfasse $\sum u_n$ CVU, il suffit que $\sum u_n$ CVN.

dém. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ comme ci-dessus

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $p > n > N_\varepsilon \Rightarrow v_{n+1} + \dots + v_p < \varepsilon$

$\forall x \in X$, $\|u_{n+1}(x) + \dots + u_p(x)\| \leq v_{n+1} + \dots + v_p < \varepsilon$

donc $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme $\Rightarrow$ CVU $\square$

$\hookrightarrow E$ complet

ex. ① $u_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{n^2}$ $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$

$|u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_n u_n$ CVN sur $\mathbb{R}$

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ CVN sur $\mathbb{R}$.

③ $u_n(z) = \dfrac{1}{n^z}$, $z \in \mathbb{C}$

$$|u_n(z)| = \frac{1}{n^x}, \quad x = \mathrm{Re}(z)$$

$\Rightarrow \forall a > 1$, $\sum u_n(z)$ CVN sur $\{ z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) \geq a \}$

$S(z) = \sum u_n(z)$ est notée $\zeta(z)$. fonction de Riemann

④ $u_n(z) = \dfrac{1}{(z-n)^2}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \mathbb{N}$.

$A \subset \mathbb{C}$ borné $\subset \{ |z| \leq R \}$, $R > 0$

$n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > R$

$\forall z \in A$, $\forall n \geq n_0$,

$$|u_n(z)| \leq \frac{1}{(n-R)^2}$$

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{(n-R)^2} \text{ CV} \Rightarrow \sum u_n(z) \text{ CVN sur } A$$

$\Rightarrow \sum u_n$ CVU sur $A \setminus \mathbb{N}$,

et $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ fonction C^0 sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

De plus $\sum u_n'(z) = -2\sum \frac{1}{(z-n)^3}$ CVU sur tout $A' \subset \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$ borné

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}, \quad S'(x) = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^3}.$

6) Stone - Weierstrass

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, X esp top compact

$C^0(X, K) = \{ f : X \to K, f \text{ continue} \}$

$\hookrightarrow d(f,g) = \sup\{ |f(x) - g(x)|, x \in X \}$.

$C^0(X, K)$ est un e.v.n $\left(\|f\|_\infty = \sup\{ |f(x)|, x \in X \} \right)$

$\rightsquigarrow$ et peut être muni du produit

$$(f, g) \mapsto \left(x \mapsto f(x)\, g(x) \right)$$

Ppté

- produit commutatif et associatif, distributif // $+$ $\quad (f+g \cdot (x \mapsto f(x) + g(x)))$

$\rightsquigarrow C^0(X, K)$ anneau commutatif

- K-algèbre. $\forall f \in C^0(X,K)$, $g \mapsto fg$ est K linéaire, i.e.

$\forall g, h \in C^0(X,K)$, $\forall \lambda \in K$,

$$f(g+h) = fg + fh \text{ et } f(\lambda g) = \lambda(fg)$$

- $\forall f, g \in C^0(X,K)$, $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$

$\Rightarrow$ produit C^0

$$\left(\|f_1 g_1 - f_2 g_2\|_\infty \leq \|f_1(g_1 - g_2)\|_\infty + \|(f_1 - f_2) g_2\|_\infty \right.$$
$$\left. \leq \|f_1\|_\infty \|g_1 - g_2\|_\infty + \|f_1 - f_2\|_\infty \|g_2\|_\infty . \right)$$

Thm. (Stone-Weierstrass, cas réel)

X esp top compact, $A \subset C^0(X, \mathbb{R})$ sous-algèbre t.q.

a) $\forall x \in X$, $\exists f \in A$ t.q. $f(x) \neq 0$

b) $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists f \in A$ t.q. $f(x) \neq f(y)$.

Alors A est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$.

Lemme. $t \mapsto \sqrt{t}$ est lim unif sur $[0,1]$ de $(P_n)_n$

$\hookrightarrow$ polynômes t.q. $P_n(0) = 0$

dém $s \in]-\infty, 1] \rightsquigarrow f(s) = 1 - \sqrt{1-s}$.

$$1 - \sqrt{1-s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n s^n$$ développement en série entière en 0.

CVN sur $]-1,1[$.

($f'(s) = \frac{1}{2}(1-s)^{-1/2}$, $f''(s) = \frac{1}{4}(1-s)^{-3/2} \rightsquigarrow \forall n$, $f^{(n)}(s) = b_n (1-s)^{1/2-n}$

$b_{n+1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) b_n$, $b_1 = \frac{1}{2}$.

$a_n = \frac{b_n}{n!}$, $b_n > 0$.)

Pour Q_n : $s \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k s^k$

$\forall s \in [0,1[$, $Q_n(s)$ CV vers $1 - \sqrt{1-s}$

$a_n > 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \forall s \in [0,1[, \ (Q_n(s)) \nearrow$

$\Rightarrow \forall n \geq 1, \quad 1 - \sqrt{1-s} \geq Q_n(s)$ (aussi pour $s=1$ par C^0)

$\rightsquigarrow (Q_n(1)) \nearrow$ majorée donc $\sum a_n$ CV, et $\sum a_n s^n$ CVN sur $[0,1]$ $(|a_n s^n| \leq a_n)$

$\rightsquigarrow$ La somme est C^0 et $= \left(s \mapsto 1 - \sqrt{1-s}\right)$ sur $[0,1[$.

et (Q_n) CVU sur $[0,1]$ vers $s \mapsto 1 - \sqrt{1-s}$.

On pose $P_n(t) = Q_n(1) - Q_n(1-t)$.

$\rightsquigarrow (P_n)_n$ CVU sur $[0,1]$ vers $\sqrt{t}$ $\blacksquare$

Lemme. $A \subset C^0(X, \mathbb{R})$ ss alg. fermée.

a) Si $f \in A$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{f} \in A$

b) $\forall f \in A$, $|f| \in A$

c) $\forall f, g \in A$, $\sup(f, g) \in A$,
$\inf(f, g) \in A$

d) $\forall J \neq \emptyset$, $J \subset A$, $\sup(J) \in A$
$\inf(J) \in A$

<u>dém</u> a) $f : X \to \mathbb{R}_+$.

$a \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $a \|f\|_\infty \leq 1$

$h : X \to [0,1]$, $x \mapsto a f(x)$

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \sqrt{t}$

$\to g \circ h$ est lim unif de $(P_n \circ h)$

$h \in A \Rightarrow \forall n > 0,\ h^n \in A \Rightarrow P_n \circ h \in A$

A fermée $\Rightarrow g \circ h \in A$.

Or $g \circ h : x \mapsto \sqrt{a f(x)} = \underset{\underset{0}{\parallel}}{\sqrt{a}} \sqrt{f(x)} \Rightarrow \sqrt{f} \in A$.

b) $\Leftarrow$ a) $\quad \left(f^2 \in A \text{ et } |f| = \sqrt{f^2} \right)$

c) $\Leftarrow$ b) $\quad \left(\sup(f, g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2} \text{ etc} \right)$

d) réc sur nbre d'él de J. $\blacksquare$

A ss alg fermée de $C^0(X, \mathbb{R})$ comme dans le thm de Stone-Weierstrass

Fixons $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$

Lemme. $\forall x, y \in X$, $\exists g \in A$ t.q. $g(x) = f(x)$, $g(y) = f(y)$

<u>dém</u> $\quad \varphi : C^0(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$

$$g \mapsto (g(x), g(y))$$

$\exists g \in A$ t.q. $g(x) \neq 0$ donc $\varphi(A)$ e.v. $\neq \{0\}$

• Si $x = y$, $\varphi(A) = \{(t,t),\ t \in \mathbb{R}\}$.

et on a bien $\varphi(f) \in \varphi(A)$.

• Si $x \neq y$, (a), (b) dans Stone-Weierstrass

$\Rightarrow \exists\, g_1, g_2, g_3 \in A$ t.q. $g_1(x) \neq 0$, $g_2(y) \neq 0$,
$g_3(x) \neq g_3(y)$.

$\rightsquigarrow$ Si $\varphi(g_1), \varphi(g_2), \varphi(g_3)$ prop, $\exists\, g = g_1 \in A$ t.q.

$0 \neq g(x)$, $g(y) \neq 0$ $\quad$ ($\varphi(g_2)$ prop à $\varphi(g_1)$)

et $g(x) \neq g(y)$ $\quad$ ($\varphi(g_3)$ prop à $\varphi(g_1)$)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} g(x) & g(x)^2 \\ g(y) & g(y)^2 \end{vmatrix} = g(x)\,g(y)\,\big(g(y)-g(x)\big) \neq 0$$

donc $\varphi(g)$ et $\varphi(g^2)$ sont propres et $g, g^2 \in A$.

Dans tous les cas, $\varphi(A)$ de dim > 1 donc $\varphi(A) = \mathbb{R}^2$ et $\varphi(f) \in \varphi(A)$.

Lemme. $\forall x \in X$, $\exists g_x \in A$ t.q. $g_x(x) = f(x)$ et $\forall y \in X$, $g_x(y) > f(y) - \varepsilon$

<u>dém</u>. $I_x = \{g \in A \text{ t.q. } g(x) = f(x)\}$

$\forall g \in I_x$, $U_g := \{y \in X \text{ t.q. } g(y) > f(y) - \varepsilon\}$.

f, g C^0 $\Rightarrow$ U_g ouvert.

Par le lemme préc, $\forall y \in X$, $\exists g \in A$ t.q.

$f(x) = g(x)$ et $f(y) = g(y)$

Alors $g \in I_x$ et $y \in U_g$, i.e, $(U_g)_{g \in I_x}$ est un recouvrement ouvert de X.

$\Rightarrow$ Il existe $J_x \subset I_x$ partie finie t.q

$(U_g)_{g \in J_x}$ recouvre X Pour $g_x = \sup(J_x)$.

Comme $g(x) = f(x)$ $\forall g \in J_x$, $g_x(x) = f(x)$

Pour tout $y \in X$, $\exists g \in J_x$ t.q. $g(y) > f(y) - \varepsilon$

Alors $g_x(y) \geq g(y) > f(y) - \varepsilon$,

et on remarque que $g_x \in A$. $\blacksquare$

Lemme. $\exists g \in A$ t.q. $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$.

dém $I = \{h \in A \text{ t.q. } \forall y \in X,\ h(y) > f(y) - \varepsilon\}$.

$\forall h \in I$, $V_h := \{x \in X,\ h(x) < f(x) + \varepsilon\}$

f, h $C^0 \Rightarrow V_h$ ouvert de X.

Par le lemme préc, $\forall x \in X$, $\exists g_x \in A$ t.q. $f(x) = g_x(x)$

et $\forall y \in X$, $g_x(y) > f(y) - \varepsilon$.

Alors $g_x \in I$ et $x \in V_{g_x}$ i.e. $(V_h)_{h \in I}$ recouvrt ouvert de X.

$\Rightarrow \exists J \subset I$ fini t.q. $(V_h)_{h \in J}$ recouvre X.

Soit $g := \inf(J)$ $(g \in A)$

Soit $x \in X$. $\forall h \in J$, $h(x) > f(x) - \varepsilon$ donc $g(x) > f(x) - \varepsilon$

et $\exists h \in J$ t.q. $h(x) < f(x) + \varepsilon$

d'où $f(x) - \varepsilon < h(x) < f(x) + \varepsilon$ i.e. $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Comme $\sup\{|f(x) - g(x)|, x \in X\}$ atteint $(X$ cpct$)$

$$\|f - g\|_\infty = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in X\} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

fin dém de SW.

$A \subset C^0(X, \mathbb{R})$ ss alg fermée vérifiant les hyp.

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists f_n \in A$ t.q. $\|f - f_n\|_\infty < \frac{1}{n+1}$

$\rightsquigarrow (f_n)_n$ CV vers f et A fermée $\Rightarrow f \in A$.

$\Rightarrow A = C^0(X, \mathbb{R})$.

Cor. (S W complexe)

X esp top cpct, A ss-alg de $C^0(X, \mathbb{C})$ t.q.

a) $\forall x \in X$, $\exists f \in A$ t.q. $f(x) \neq 0$

b) $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists f \in A$ t.q. $f(x) \neq f(y)$

c) $\forall f \in A$, $\bar{f} \in A$

Alors A est dense dans $C^0(X, \mathbb{C})$

Cor. (Thm de Weierstrass)

Soit X partie cpte de $\mathbb{R}$

L'ensemble des fcts polynomiales est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$.

Cor. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ Soit $C^0_{per}(\mathbb{R}, K)$ = e v des fcts C^0 pér.

de période a de $\mathbb{R}$ dans K muni de la cv unif sur $\mathbb{R}$

a) Le s.e.v. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ de $C^0_{per}(\mathbb{R}, K)$ engendré par les fcts

$t \mapsto e^{2i\pi nt/a}$, $n \in \mathbb{Z}$, est dense dans $C^0_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

b) Le s.e.v. $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ de $C^0_{per}(\mathbb{R}, K)$ eng par les fcts

$t \mapsto \sin(2\pi nt/a)$, $t \mapsto \cos(2\pi nt/a)$ est dense dans $C^0_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$