

Cours sur les séries numériques Prépa Agreg, Amiens

M. Leguil

23/11/2020

Séries Numériques (62)

Introduction

E espace vectoriel normé sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Pour toute famille $(u_i)_{i \in I}$ **finie** d'éléments de E , $\sum_{i \in I} u_i$ a un sens.
& propriétés d'**associativité** / **commutativité**
- Si $I = \mathbb{N}$, i.e pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$

on définit la suite $(S_n)_n$ des **sommes partielles**, où

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k, \quad \text{pour } n \geq 0$$

Si $(S_n)_n$ converge, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite ou **somme**.
↳ i.e $\lim_n S_n$ existe

Même si $(S_n)_n$ CV, la somme n'est pas nécessairement commutative.

si $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijection, $\tilde{S}_n = \sum_{k=0}^n u_{\psi(k)}$ peut ne pas être CV,

et même si $(\tilde{S}_n)_n$ CV, on n'a pas forcément $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\psi(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

1) Propriétés générales

$(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Def Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ → série $\sum u_n$ de terme général u_n → notation pour insister sur le fait qu'on va sommer le terme

On dit que $\sum u_n$ converge (CV) si la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles

converge, i.e. $\lim_n S_n = \lim_n (u_0 + \dots + u_n)$ existe

→ Dans ce cas, on appelle $\lim_n S_n$ la somme de $\sum u_n$ on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

→ Sinon, on dit que $\sum u_n$ est divergente (DV).

Example. $(u_n)_n$, avec $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $\forall n \geq 0$.

$$\text{On a } u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\text{d'où } S_n = \sum_{k=0}^n u_k = 1 - \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc $(S_n)_n$ CV, i.e., $\sum u_n$ CV, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1.$$

Prop. Si $\sum u_n$ CV, alors $(u_n)_n$ CV vers 0

dém. Notons $l = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

$$\left. \begin{array}{l} \text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = l \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = l - l = 0 \quad \square$$

Rem. Condition pas suffisante.

ex. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sqrt{n+1} \quad \text{DV mais } u_n = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(téléscopage)

Prop. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $v_n = u_n$ p.m. $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$

Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (CV ou DV)

dém. $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, $S'_n = \sum_{k=0}^n v_k$

$$\leadsto \forall n \geq n_0, S'_n - S_n = \sum_{k=0}^{n_0} v_k - u_k$$

$$\text{donc } (S'_n)_n \text{ CV} \underline{\text{ssi}} (S_n)_n \text{ CV} \quad \square$$

Prop. L'ensemble $\mathcal{Y} := \{ (u_n) \in E^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } \sum u_n \text{ CV} \}$ des séries CV

est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

De plus, $\Sigma : \mathcal{Y} \rightarrow E$ est linéaire

$$(u_n)_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

dém. (a) $(u_n)_n \in \mathcal{Y}$, on $u_n = 0, \forall n \geq 0$.

(b) Soit $(u_n)_n, (u'_n)_n \in \mathcal{Y}$, et soit $(S_n)_n, (S'_n)_n$ les suites
↓ sommes partielles

$$S_n \xrightarrow{n} l = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \quad S'_n \xrightarrow{n} l' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n,$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n (u_k + u'_k) = S_n + S'_n \longrightarrow l + l'$$

$$\text{donc } \sum (u_n + u'_n) \text{ CV, et } \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + u'_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$$

$$(c) \text{ Soit } (u_n)_n \in \mathcal{Y}, \lambda \in K \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k \text{ CV}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k) = \lambda S_n \text{ CV, et } \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \square$$

Supposons que E est un espace vectoriel normé **complet**

Par ex, $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(C'est-à-dire de Cauchy est CV)

Prop. (Critère de Cauchy)

Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. Alors $\sum u_n$ CV ssi $(S_n)_n$ est de Cauchy, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \text{ t.q. } n \geq N_\varepsilon, p \geq 0 \Rightarrow \underbrace{\|S_n - S_{n+p}\|}_{\|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}\|} \leq \varepsilon$$

Remarque. $\Rightarrow$ est toujours vrai, c'est pour $\Leftarrow$ que la complétude est nécessaire.

Exemple. (Série harmonique) Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $u_0 = 0$, $u_n = \frac{1}{n}$ pour tous $n \geq 1$.

La série $\sum \frac{1}{n}$ DV

En effet, $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} \geq \frac{m-n}{m}$ pour tous $n \geq 0$ pour $m = 2n$, $\frac{m-n}{n} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$

2) Série géométrique $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Tout $\sum u_n$ série de terme général $u_n = u_0 \lambda^n$, $u_0 \in K \setminus \{0\}$
 $\lambda \in K$

$$\text{On note } B(0,1) =]-1,1[\text{ si } K = \mathbb{R} \\ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \text{ si } K = \mathbb{C}$$

1^{er} cas $\lambda \notin B(0,1)$. Alors $|u_n| = |u_0 \lambda^n| \geq |u_0| > 0$
(i.e. $|\lambda| \geq 1$) donc $u_n \not\rightarrow 0$ et $\sum u_n$ DV.

2^e cas $\lambda \in B(0,1)$ Alors $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \sum_{k=0}^n \lambda^k = u_0 \times \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}$
(i.e. $|\lambda| < 1$)

$$|\lambda| < 1 \Rightarrow \lambda^{n+1} \xrightarrow{n} 0 \text{ donc } S_n \xrightarrow{n} \frac{u_0}{1 - \lambda}, \text{ i.e. } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1 - \lambda}.$$

3) Séries à termes positifs

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, alors $(S_n = u_0 + \dots + u_n)_n$ est **croissante**.

(On fait S_n est croissante ssi $(u_n)_n$ est à termes positifs)

Rappel. Soit $(v_n)_n$ suite croissante Gn a L cas.

(a) $(v_n)_n$ n'est pas majorée, et alors $\lim_n v_n = +\infty$

(b) $(v_n)_n$ est majorée par $M \geq 0$, et alors $(v_n)_n$ CV vers

$$l \in \mathbb{R}, l = \sup_n v_n \leq M$$

Corollaire. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ CV ssi $(S_n)_n$ est majorée

• s. $\sum u_n$ CV, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup \left(\{S_n\}_n \right)$, en particulier, $\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, $\forall n \geq 0$

(avec $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sommes partielles)

• Si $\sum u_n$ DV, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ (convention justifiée par le fait que $S_n = \sum_{k=0}^n u_k \rightarrow +\infty$)

Prop. Soit $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, avec $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(a) Si $\sum v_n$ CV, alors $\sum u_n$ CV (et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$)

(b) Si $\sum u_n$ DV, alors $\sum v_n$ DV

dém. (a) $\forall n \geq 0, \underbrace{\sum_{k=0}^n u_k}_{S_n} \leq \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$

Rqm. on peut modifier l'énoncé en supposant $u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$, CV/DV ne change pas, même plus forcément vrai

donc $(S_n)_n$ CV (croissante + majorée) vers $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \in \mathbb{R}$

(b) Contre-exemple de (a)



Prop. $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathcal{S}$. $\frac{u_n}{v_n}$ défini pour $n \geq n_0$,

$$\text{et } \lim_{n_0 \leq n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\leadsto \text{si } \sum v_n \text{ CV alors } \sum u_n \text{ CV}$$

$\leadsto$ si $\lambda \neq 0$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

dém. : $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \lambda \Rightarrow u_n \leq (1+\lambda) v_n$ pour n assez grand.

$$\sum_n v_n \text{ CV} \Rightarrow \sum_n (1+\lambda) v_n \text{ CV} \Rightarrow \sum_n u_n \text{ CV d'après prop. préc.}$$

• si $\lambda \neq 0$ alors on a aussi $v_n \leq (1+\lambda^{-1}) u_n$ pour n assez grand etc



Exemple. $(u_n)_n$ avec $u_n = \frac{1}{n^2}$ $n \geq 1$.

$(v_n)_n$ avec $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et on a vu qm $\sum_n v_n$ CV

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ est CV.

Prop. (Critère de Cauchy)

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ suite positive décroissante. Alors

$$\sum u_n \text{ CV} \iff \sum 2^h u_{2^h} \text{ CV}$$

Donc. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $i \in \mathbb{N}$ t.q. $2^{n-1} \leq i < 2^n$.

$$\forall i \in [2^{n-1}, 2^n],$$

$$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n} \frac{n}{2^n} \leq \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n} u_i \leq \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n} \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{2} \left(2^n \frac{n}{2^n} \right) \leq \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n} u_i \leq 2^{n-1} \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2^k \frac{n}{2^k} \leq \sum_{i=1}^{2^n} u_i \leq \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \frac{n}{2^{k-1}}$$

donc $\sum u_n$ CV ssi $\sum 2^n \frac{n}{2^n}$ CV



5) Série de Riemann

Prop. Pour $\alpha > 0$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est CV ssi $\alpha > 1$

→ série de Riemann

dém. $\alpha > 0 \Rightarrow n \mapsto \frac{1}{n^\alpha}$ est positive décroissante

Donc par le critère de Cauchy, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV ssi $\sum \frac{2^n}{(2^n)^\alpha}$ CV

mais $\frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = (2^{1-\alpha})^n$ donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV ssi $|2^{1-\alpha}| < 1$
 $\frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}} < 1$
 $\alpha > 1$

autre dém On a vu que $\sum \frac{1}{n}$ DV donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ DV pour $0 < \alpha \leq 1$

On a vu que $\sum \frac{1}{n^2}$ CV donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV pour $\alpha \geq 2$ ($\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$)

$\leadsto$ Soit $\alpha > 1$ et posons $f: x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ $\left[f'(x) = \frac{1-\alpha}{x^\alpha} \right]$

Accroissements finis sur $[n, n+1] \leadsto f(n+1) - f(n) = f'(x_n), \quad n < x_n < n+1$

i.e. $-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{x_n^\alpha}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \right) = -\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} + 1 = (\alpha-1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^\alpha}$

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k^\alpha}{k^\alpha} = 1$ donc $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ CV $\xrightarrow{\text{Sg}} \sum \frac{1}{x_k^\alpha}$ CV

$\frac{\delta \delta_i}{\delta \delta_i} \quad \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}$ CV

$\alpha > 1$



Corollaire. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$

• Si $\exists \alpha > 1$ t.q. $(n^\alpha u_n)_n$ est majorée, alors $\sum u_n$ CV

• Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $n u_n \geq m$, pour $n \geq n_0$,
 $m > 0$

alors $\sum u_n$ DV

dém • Si $n^\alpha u_n \leq M$, alors $u_n \leq \frac{M}{n^\alpha} \Rightarrow \sum u_n$ CV

↳ terme gén d'une série CV

• Si $n u_n \geq m$ alors $\frac{m}{n} \leq u_n$ donc $\sum u_n$ DV.

↳ g. d'une série DV

ex. ① $\sum (u_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, $u_n = \frac{1}{n^2 + \alpha^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$n^2 u_n \rightarrow 1 \text{ donc } \sum u_n \text{ CV}$$

② $v_n = \sum \frac{a}{n}$, $a > 0$ $n \geq n_0$ assez grand pour que $v_n \geq 0$.

$$\lim_n n v_n = a > 0 \text{ donc } \sum v_n \text{ DV.}$$

③ $w_n = \frac{1}{n} \sum \frac{a}{n}$, $n \geq n_0$.

$$\lim_n n^2 v_n = a > 0 \text{ donc } \sum w_n \text{ CV.}$$

Prop. : $\exists C \in \mathbb{R}$ tq. $\lim_n \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right] = C$
← constante d'Euler

dém. Soit $u_n = \frac{1}{n} + [\log(n-1) - \log(n)]$ pour $n \geq 2$

$$\sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \log n$$

De plus, $u_n = \frac{1}{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{M}{n^2}$, $M > 0$

Donc $\sum u_n$ CV vers $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = 1$ $\square$

Prop. Soit $\alpha > 0$ Alors la srie $\sum \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$

dém. $\sum \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ CV ssi $\sum \frac{2^n}{2^n (\log 2^n)^\alpha}$ CV

$$\text{Mais } \frac{2^n}{2^n (\log 2^n)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha (\log 2)^\alpha} = \frac{1}{(\log 2)^\alpha} \times \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\text{et } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ CVssi } \alpha > 1. \quad \blacksquare$$

6) Somme des relations de Comparaison

Reformulation d'un résultat déjà vu
Prop. Soit $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$

i) Si $v_n = O(u_n)$ pour $n \rightarrow +\infty$, alors $\sum u_n \text{ CV} \Rightarrow \sum v_n \text{ CV}$.

ii) Si $u_n \sim v_n$ pour $n \rightarrow +\infty$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature

dém i) $v_n = O(u_n) \rightsquigarrow \exists M > 0 \text{ t.g. } v_n \leq M u_n \text{ pour } n \geq n_0$

et alors $\sum u_n \text{ CV} \Rightarrow \sum M u_n \text{ CV} \Rightarrow \sum v_n \text{ CV}$.

ii) $u_n \sim v_n \rightsquigarrow \lim_n \frac{v_n}{u_n} = 1$

et $\sum u_n, \sum v_n$ sont de même nature

Prop. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}_+^N$, $(v_n)_n \in \mathbb{R}_+^N$ tels que $u_n \sim v_n, n \rightarrow +\infty$

Alors

1) $\sum u_n$ CV ssi $\sum v_n$ CV, et les reste tendent

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k, \quad n \rightarrow +\infty$$

2) $\sum u_n$ DV $\Rightarrow \sum v_n$ DV, et $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$

dém. 1) Supposons que $\sum u_n$ CV ($\Rightarrow \sum v_n$ CV)

$$u_n \sim v_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \text{ t.q. } n \geq n_\varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon \leq \frac{v_n}{u_n} \leq 1 + \varepsilon$$

$$(*) \quad (1 - \varepsilon) u_n \leq v_n \leq (1 + \varepsilon) u_n$$

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow (1 - \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

et donc

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k}{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k} \leq 1 + \varepsilon$$

e) Supposons $\sum u_n$ DV ($\Rightarrow \sum v_n$ DV)

(*) $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow (1 - \varepsilon) u_n \leq v_n \leq (1 + \varepsilon) u_n$

$$\leadsto \underbrace{\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} v_k + (1 - \varepsilon) \sum_{k=n_\varepsilon+1}^n u_k}_{\sim \sum_{k=0}^n u_k \times (1 - \varepsilon)} \leq \sum_{k=0}^n v_k \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} v_k + (1 + \varepsilon) \sum_{k=n_\varepsilon+1}^n u_k}_{\sim \sum_{k=0}^n u_k \times (1 + \varepsilon)}$$

$\Rightarrow \exists N_\varepsilon \text{ t } \forall n \geq N_\varepsilon$

$$1 - 2\varepsilon \leq \frac{\sum_{k=0}^n v_k}{\sum_{k=0}^n u_k} \leq 1 + 2\varepsilon$$



ex. $(S_n)_n \in \mathbb{R}_+^{N^*}$, $S_n := \log \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$, $n \geq 1$

(formule de Stirling)

On a $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ où $u_1 = S_1 = 1$
 $u_k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \geq 2$

$$\leadsto u_k = S_k - S_{k-1} = \log \frac{k e (k-1)^{k-1} \sqrt{k-1}}{k^k \sqrt{k}} = \log \left[e \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k - \frac{1}{2}} \right]$$

$$\text{donc } u_k = 1 + \left(k - \frac{1}{2}\right) \log \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1 - \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)$$

$$= 1 - 1 - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

donc $\sum u_n$ CV, i.e., $(S_n)_n$ CV vers $S \in \mathbb{R}$, et

$$\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \rightarrow e^S. \text{ On utilise } e^S = \sqrt{2\pi n} \leadsto n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

7) Comparaison sém-intégrale

Prop. Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, C⁰ par morceaux, décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Alors la suite $(u_n)_n$ est CV, où

$$u_n := f(0) + \dots + f(n) - \int_0^n f(t) dt, \quad n \geq 0$$

En particulier, $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ ont même nature.

Dém. $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$

↓

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)}_{\sum_{k=0}^n f(k) - f(0)} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt}_{\int_0^n f(t) dt} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(k)}_{\sum_{k=0}^n f(k) - f(n)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(n) \leq \underbrace{\sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt}_{u_n} \leq f(0)$$

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t) dt \leq 0$$

donc $(u_n)_n$ suite décroissante et minorée (par 0) $\rightarrow (u_n)_n \subset \mathbb{V}$

$\leadsto$ On a $n \mapsto \sum_{k=0}^n f(k)$ et $n \mapsto \int_0^n f(t) dt$ croissantes
 et l'une de ces suites CV ssi l'autre CV

$\left(\begin{array}{l} v_n \uparrow \\ w_n \uparrow \end{array} \right) \text{ donc CV } \underline{\text{ssi}} \text{ majorée } \& \text{ } u_n = v_n - w_n \text{ bornée}$

Remarque $\sum_{k=0}^n f(k)$ CV $\Rightarrow f$ doit tendre vers 0 en $+\infty$.

ex (série de Bertrand) $\sum_{k \geq 2} f(k)$ avec $f: x \mapsto \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\alpha \leq 0$
 $\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum f(k)$ DV $\left(t_g \geq \frac{1}{n} \text{ à partir d'un certain rang} \right)$

$\leadsto \underline{\alpha > 0}$ f est $\searrow$ positive au voisinage de $+\infty$

$$\bullet \int_2^x \frac{dt}{t^{\alpha} \log^{\beta} t} = \int_{\log 2}^{\log x} \frac{1}{(e^n)^{\alpha} n^{\beta}} e^n dn = \int_{\log 2}^{\log x} \frac{(e^n)^{1-\alpha}}{n^{\beta}} dn$$

$$n = \log t \rightsquigarrow t = e^n$$

$$dn = \frac{1}{t} dt$$

$$\text{done} \cdot \alpha > 1 \rightsquigarrow \int_2^{\infty} f(t) dt \text{ CV}$$

$$\bullet \alpha = 1 \rightsquigarrow \int_2^x f(t) dt = \int_{\log 2}^{\log x} \frac{1}{n^{\beta}} dn \quad \text{CV} \text{ \underline{Sri}} \quad \beta > 1$$

$$\bullet \alpha \in]0, 1[\rightsquigarrow \int_2^x f(t) dt \text{ DV}$$

$$\text{\underline{Conclusion}}: \sum_n \frac{1}{n^{\alpha} \log^{\beta} n} \text{ CV} \iff \alpha > 1 \text{ or } (\alpha = 1 \text{ or } \beta > 1)$$

Prop $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ positive, C^∞ par morceaux, décroissante p.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

S. $\sum f(n)$ CV alors le reste $R_n = \sum_{h=n+1}^{+\infty} f(h)$ satisfait

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

dém $\int_{n+1}^{n+2} f(t) dt \leq f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt$

$$\int_{n+2}^{n+3} f(t) dt \leq f(n+2) \leq \int_{n+1}^{n+2} f(t) dt$$

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

(Remarque: $\sum f(n) \text{ CV} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt$)



exemple. Une valeur approchée de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est

$$S'_{10} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2} + \int_{11}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ et}$$

$$0 < S - S'_{10} < \int_{11}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{11} < \frac{1}{100}$$

8) Séries absolument CV (on quitte les séries positives)

$(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé **complet** (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
→ valeur absolue
↘ module

Prop. Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ si $\sum_n \|u_n\|$ CV, alors $\sum u_n$ CV

On dit que $\sum u_n$ est **absolument convergente** (AC).

dém Montrons que $(S_n)_n$ est de Cauchy ($\Rightarrow$ CV car E complet)

$$0 \leq \|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \overset{u_0 + \dots + u_n}{u_{n+1} + \dots + u_{n+p}} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\| \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

donc $\sum u_n$ CV 

exemples: (a) $\sum u_n$, où $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ $|u_n| = \frac{1}{n^2}$ t.g. d'une série CV

donc $\sum u_n$ AC

(b) Idem pour $\sum \frac{\cos(na)}{n^2}$ et $\sum \frac{\sin(na)}{n^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

Produits de séries AC

$$n \in \mathbb{R} \rightsquigarrow n^+ = \max(0, n) \geq 0$$

$$n^- = \max(0, -n) \geq 0$$

$$\text{On a } n = n^+ - n^- \text{ et } |n| = n^+ + n^-$$

Prop. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $\sum u_n$ AC $\Leftrightarrow \sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ CV

$$\text{et on a alors } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$$

dém.



$$0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \text{ et } 0 \leq u_n^- \leq |u_n| \Rightarrow \sum u_n^+ \text{ et } \sum u_n^- \text{ CV}$$



$$|u_n| = u_n^+ + u_n^- \text{ et les séries CV ont un sev de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}. \quad \square$$

Prop. Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ 2 s. e. v. AC.

② $\sum (\lambda u_n + v_n)$ est AC (car $\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$) $\rightsquigarrow$ s.e.v

③ $\sum w_n$ est AC car $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$, où

$$w_n = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p}$$

dém. ① a) car $|\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda| \cdot |u_n| + |v_n|$

① i) Supposons $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ à termes positifs, et notons

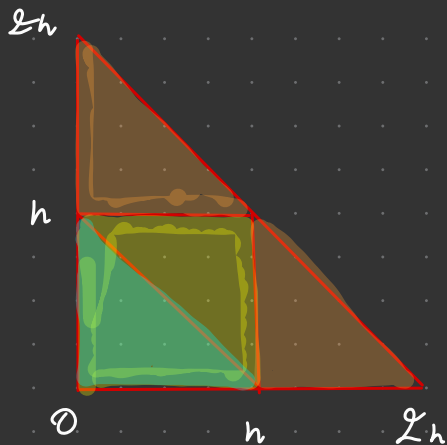
$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k, \quad V_n = \sum_{k=0}^n v_k, \quad W_n = \sum_{k=0}^n w_k$$

$$\rightsquigarrow W_n = \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k u_p v_{k-p} = \sum_{0 \leq i+j \leq n} u_i v_j \leq U_n V_n = \sum_{i=0}^n u_i \sum_{j=0}^n v_j$$

Can $0 \leq i+j \leq n \Rightarrow 0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$

Donc avec $\hat{G}_i$,

$$W_{2n} = \sum_{0 \leq i+j \leq 2n} u_i v_j \geq \sum_{i=0}^n u_i \sum_{j=0}^n v_j = U_n V_n$$



On a donc $W_n \leq U_n V_n \leq W_{2n}$

iii) $(W_n)_n$ est majoré et croissant donc CV

$$\text{De plus } \Rightarrow \lim_n W_n \leq U V \leq \lim_n W_{2n} = \lim_n W_n$$

$$\text{on } U = \lim_{\substack{\uparrow \\ n}} U_n \text{ et } V = \lim_{\substack{\uparrow \\ n}} V_n \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

$$\Rightarrow \sum w_n \text{ CV, et } \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

(iv) Cas général. Posons $w_n = \sum_{p=0}^n |u_p| |v_{n-p}|$

$$\Rightarrow w_n \text{ CV } \left(\text{vers } \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| \right)$$

$$\Rightarrow \sum w_n \text{ est AC } \left(\text{Car } |w_n| \leq w_n \text{ par inc } \Delta \right)$$

$$\text{Posons } U_n = u_0 + \dots + u_n, \quad V_n = v_0 + \dots + v_n, \quad W_n = w_0 + \dots + w_n$$

$$A_n = |u_0| + \dots + |u_n|, \quad B_n = |v_0| + \dots + |v_n|, \quad C_n = w_0 + \dots + w_n$$

$$\text{et soit } \Delta_n = \left\{ (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{array}{l} 0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq n \end{array}, \quad p+q > n \right\}$$

$$\sim \left| U_n V_n - W_n \right| = \left| \sum_{(p,q) \in \Delta_n} u_p v_q \right| \leq \sum_{(p,q) \in \Delta_n} |u_p| |v_q| = \underbrace{A_n B_n - C_n}_{\xrightarrow{\text{d'après i)}} 0}$$

$$\text{donc } (U_n V_n - W_n) \xrightarrow[n]{} 0, \text{ et}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \lim_n W_n = \lim_n U_n V_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \right). \quad \blacksquare$$

Exemple. $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\left[\begin{array}{l} n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \\ \Rightarrow \frac{x^n}{n!} \sim \sqrt{2\pi n}^{-1} \left(\frac{xe}{n}\right)^n \leq \frac{1}{n^2} \text{ pour } n \text{ grand} \end{array} \right]$$

On a $e^{x+y} = e^x \times e^y$

On effectue $\sum \frac{x^n}{n!}, \sum \frac{y^n}{n!}$ AC

et $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \times \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x+y)^n$

On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ CV vers $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = e^x e^y$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}$$



9) Règles de Cauchy, d'Alembert

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $|u_n| \leq c \lambda^n$, $c \geq 0$, $\lambda \in [0, 1[$.

Alors $\sum u_n$ est AC

on peut trouver à on étudie $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ou $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ $\rightarrow$ règle de Cauchy.

Prop. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit

$$L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} \quad (0 \leq L \leq +\infty)$$

① Si $L < 1$, $\sum u_n$ est AC

② Si $L > 1$, $\sum u_n$ est grossièrement DV

donc. Si $L < 1$, $\lim_n \left(\sup_{m \geq n} |u_m|^{\frac{1}{m}} \right) < 1$

donc $\sup_{m \geq n} |u_m|^{\frac{1}{m}} < 1$ pour n grand

donc $|u_n|^{\frac{1}{n}} < \lambda < 1$ pour n grand

donc $|u_n| < \lambda^n$ pour n grand

Si $L > 1$, $\exists$ une infinité de n t q $|u_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1$

$\Rightarrow |u_n| \geq 1$ donc $u_n \not\rightarrow 0$

et $\sum u_n$ DV



Example. $u_n = n^n x^{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$|u_n|^{\frac{1}{n}} = n |x|^n \quad \text{d'où} \quad \limsup_n |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad \text{si} \quad |x| < 1 \\ = +\infty \quad \text{si} \quad |x| \geq 1$$

$$\Rightarrow \sum u_n \text{ CV si } |x| < 1$$

Prop. Soit $(u_n)_n, (v_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ t.p.

$$n \text{ g.o.} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

$$\begin{aligned} & \& \sum v_n \text{ CV alors } \sum u_n \text{ CV} \\ (\Rightarrow & \& \sum u_n \text{ DV alors } \sum v_n \text{ DV}) \end{aligned}$$

dim

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_p}{v_p} \quad \forall n \geq p \quad (p \text{ given}) \quad \square$$

Prop Let $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.g. $\left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right)_n$ def from n fixed
th $\rightarrow L \in [0, +\infty]$

i) $L < 1$, $\sum u_n$ AC

ii) $L > 1$, $\sum u_n$ DV

dim. i) $\leadsto \exists \varepsilon > 0$ tq $L + \varepsilon < 1$ et pour $n > N_\varepsilon$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < L + \varepsilon$$

on appliq. r  . préc avec $v_n = (L + \varepsilon)^n$

ii) $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1 \Rightarrow \left(|u_n| \right)_n$ croissant    partir d'un certain n


ex i) $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$ AC car $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0$
($x \neq 0$)

ii) $u_n = \frac{x^n}{n}$, $n \geq 1$, $x \neq 0$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n} = x \times \frac{n+1}{n} \rightarrow x$ donc $\sum \frac{x^n}{n}$ AC pour $|x| < 1$
DV pour $|x| > 1$

$$3) u_n = n! x^{n^2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1) x^{(n+1)^2 - n^2} = (n+1) x^{2n+1}$$

$$\text{d'où } \lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 0 \quad \text{si } |x| < 1 \quad \leadsto \sum u_n \text{ AC}$$

$$\text{pas si } |x| > 1 \quad \leadsto \sum u_n \text{ DV}$$

10) Séries alternées

Def. $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\sum u_n$ est **alternée** si $u_n = (-1)^n v_n$

avec $\begin{cases} (v_n)_n \text{ suite } \downarrow \text{ de réels positifs} \\ \lim_n v_n = 0 \end{cases}$

Prop. Toute série alternée $\sum u_n$ est CV. ($u_n = (-1)^n v_n$)

2 $S_n = u_0 + \dots + u_n$ alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ vérifie

$$S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p} \quad \forall p \geq 0.$$



lim

$$S_{2p+2} - S_{2p} = v_{2p+2} - v_{2p+1} \leq 0 \quad \downarrow$$

$$S_{2p+1} - S_{2p-1} = -v_{2p+1} + v_{2p} \geq 0 \quad \uparrow$$

$$S_{2p+1} - S_{2p} = -\underbrace{v_{2p+1}}_{\rightarrow 0} \leq 0$$

$\Rightarrow (S_{2p})_p, (S_{2p+1})_p$ sont adjacentes donc CV vers la même limite $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ 

exemple • Série harmonique alternée $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{h+1}$ CV.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

$$v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{-1}{\sqrt{n} (\sqrt{n} + (-1)^n)} = \frac{-1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$$

$$\lim_n -n v_n = 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ DV.}$$

Prop. (Règle d'Abel)

$$(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ t.p.} \quad S_n = u_0 + \dots + u_n \text{ bornée}$$

$$(\varepsilon_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_+ \searrow, \quad \lim_n \varepsilon_n = 0.$$

$$\text{Alors } \sum \varepsilon_n u_n \text{ CV}$$

dém. $\sum_{k=n}^m \varepsilon_k u_k = \sum_{k=n}^m \varepsilon_k (S_k - S_{k-1})$

$$= \sum_{k=n}^m \varepsilon_k S_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} \varepsilon_{k+1} S_k$$

$$= \underbrace{\varepsilon_m S_m - \varepsilon_n S_{n-1}}_{\rightarrow 0} + \sum_{k=n}^{m-1} \underbrace{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})}_{\geq 0} S_k$$

$$\left| \sum_{k=n}^m \varepsilon_k u_k \right| \leq M(\varepsilon_m + \varepsilon_n) + \sum_{k=n}^{m-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) M$$

$$\text{on } |S_k| \leq M \quad \forall k \geq 0$$

$$\leq M(\cancel{\varepsilon_m} + \varepsilon_n) + M(\varepsilon_n - \cancel{\varepsilon_m})$$

$$= 2M\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$



ex. $\sum \varepsilon_n \cos(n\alpha)$ avec $\varepsilon_n \geq 0$, $\downarrow 0$ et $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$.

$$\rightsquigarrow S_n = \cos(0\alpha) + \dots + \cos(n\alpha) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ik\alpha} \right).$$

$$G_n \text{ a } \sum_{k=0}^n e^{ik\alpha} \quad \xrightarrow{\alpha \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^{i\alpha} \neq 1} \frac{e^{i\alpha(n+1)} - 1}{e^{i\alpha} - 1}$$

$$= \frac{e^{i\alpha \frac{(n+1)}{2}}}{e^{i\alpha \frac{1}{2}}} \times \left(\frac{e^{i\alpha \frac{(n+1)}{2}} - e^{-i\alpha \frac{(n+1)}{2}}}{2i} \right)$$

$$\div \left(\frac{e^{i\alpha \frac{1}{2}} - e^{-i\alpha \frac{1}{2}}}{2i} \right)$$

$$= e^{i\alpha \frac{n}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \rightsquigarrow S_n = \cos\left(\frac{\alpha n}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$|S_n| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right|} \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

donc la règle d'Abel s'applique et $\sum \varepsilon_n \cos(n\alpha)$ CV

