Espaces vectoriels normés

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Déf. E e v sur K. Une norme sur E est une appl $N : E \to \mathbb{R}_+$ t q.

a) $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $N(x) \neq 0$

b) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in K$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

c) $\forall x, y \in E$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Un e v n est un couple $(\underset{\text{e v}}{E}, \underset{\text{norme}}{N})$

Lemme. E e.v sur K et $p : E \to \mathbb{R}_+$ une appl. Les ptés suivantes sont équiv.

(i) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in K$, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

(ii) $\forall x \in E, \ \forall \lambda \in K, \quad p(\lambda x) \leq |\lambda| \ p(x)$

dém (i) $\Rightarrow$ (ii)

Si (ii) vraie, soit $x \in E$ et $\lambda \in K$ Si $\lambda = 0$, $\Rightarrow 0 \leq p(\lambda x) \leq |\lambda| \ p(x) = 0$

Si $\lambda \neq 0$, $|\lambda| \ p(x) = |\lambda| \ p(\lambda^{-1}(\lambda x)) \leq |\lambda| \ |\lambda|^{-1} \ p(\lambda x) = p(\lambda x)$. ■

Soit (E, N) e v n, $x \in E$, $r \in \mathbb{R}_+$

Si $r > 0$, boule ouverte de centre x et rayon r $= B_N(x, r) = \{y \in E, \ N(y-x) < r\}$

— fermée — $= \overline{B}_N(r, x) = \{ \quad \leq r\}$

Prop (E, N) e v n.

a) $(x, y) \longmapsto N(y-x)$ est une distance sur E

b) $\exists$ top. sur E pour laquelle les parties ouvertes sont les réunions de boules ouvertes

c) Soit $x \in E$, $U \subset E$. Alors U est un voisinage de x <u>ssi</u> $\exists\, r > 0$, tq $B(x, r) \subset U$.

d) $N : E \to \mathbb{R}_+$ est continue pour cette topo.

Prop. (E, N) e.v.n.

les appl $(x, y) \longmapsto x + y$ sont continues

$(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$

dém. la topo produit de $E \times E$ est définie par la distance

$$D_1 : ((x, y), (x', y')) \longmapsto N(x - x') + N(y - y')$$

Pour $((x, y), (x', y')) \in E \times E$, $N((x + y) - (x' + y')) \leq N(x - x') + N(y - y')$

donc $(x, y) \longmapsto x + y$ est Lipschitzienne de rapport 1 donc C^0

Soit $x_0 \in E$, $\lambda_0 \in K$, $\varepsilon > 0$

Posons $\eta = \dfrac{\varepsilon}{N(x_0) + |\lambda_0| + \varepsilon + 1}$; si $|\lambda - \lambda_0| < \eta$ et $N(x - x_0) < \eta$, alors

$$
\begin{aligned}
N(\lambda x - \lambda_0 x_0) &= N\big(\lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0) x_0\big) \\
&\leq N\big(\lambda (x - x_0)\big) + N\big((\lambda - \lambda_0) x_0\big) \\
&= |\lambda| \, N(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0| \, N(x_0) \\
&\leq \eta \big(|\lambda| + N(x_0)\big) \\
&< \eta \big(|\lambda_0| + \eta + N(x_0)\big) \\
&< \eta \big(|\lambda_0| + 1 + N(x_0)\big) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

$|\lambda| < |\lambda_0| + \eta$

donc $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ est C^0 en (λ_0, x_0). ∎

Prop : dans un e v n,

- l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon
- l'int d'une boule fermée de rayon $\neq 0$ est la boule ouverte de même rayon

dém : (E, N), $x \in E$, $r > 0$.

Comme $y \longmapsto N(y-x)$ est continue, la boule $\overline{B}(x,r)$ est une partie fermée de E donc $\overline{B}(x,r)$ contient l'adhérence de $B(x,r)$

Soit $y \in \overline{B}(x,r)$; pour $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x + \frac{n}{n+1}(y-x)$

$y_n - x = \frac{n}{n+1}(y-x)$ donc $N(y_n - x) = \frac{n}{n+1} \underbrace{N(y-x)}_{\leq r} < r$

donc $y_n \in B(x,r)$

et $\frac{n}{n+1} \to 1$ donc $\frac{n}{n+1}(y-x) \to y-x$ donc $y_n \xrightarrow[n]{} y$

donc y est dans l'adhérence de $B(x,r)$.

- Comme $B(x,r)$ est ouverte, elle est contenue dans l'intérieur de $\overline{B}(x,r)$.

Soit y un point dans $\overset{\circ}{\overline{B}}(x,r)$,

$$y_n = x + \frac{n+2}{n+1}(y-x) \rightsquigarrow y_n \xrightarrow[n]{} y$$

donc pour n grand $y_n \in \overline{B}(x,r)$

donc $y \in B(x,r)$ puisque $N(y-x) = \frac{n+1}{n+2} \overbrace{N(y_n - x)}^{\leq r} < r$ ∎

Prop. Dans un e v n, l'adhérence d'un s e v est un s.e v

dém. E e.v.n et $F \subset E$ s.e.v. de E.

L'ensemble $\{(x,y) \in E \times E,\ x+y \in \overline{F}\} \supset F \times F$.

(car F est stable par addition et $F \subset \overline{F}$)

Comme $f : (x,y) \longmapsto x+y$ est C^0,

$\{(x,y) \in E \times E,\ x+y \in \overline{F}\} = f^{-1}(\overline{F})$ est fermé

donc contient l'adhérence de $F \times F$, i.e., $\overline{F} \times \overline{F}$.

donc $\forall x, y \in \overline{F}$, $x+y \in \overline{F}$.

De même, $\{(\lambda, x) \in K \times E \text{ t.q. } \lambda x \in \overline{F}\}$ contient $K \times \overline{F}$

donc $\forall x \in \overline{F}$ et $\lambda \in K$, $\lambda x \in \overline{F}$. Enfin $0 \in F \in \overline{F}$ ∎

Déf. (espace de Banach)

Un espace de Banach est un e v n. complet (pour la distance associée)

Ex. Un e v n E est de Banach ssi toute série $\sum u_n$ abs CV (i.e. t.q $\sum \|u_n\|$ CV) est CV.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\sum u_n$ AC. $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \rightsquigarrow (S_n)_n$ est de Cauchy.

$$q > p \rightsquigarrow \|S_p - S_q\| = \left\|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right\| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\|$$

$$\sum_k \|u_k\| \text{ CV} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ t.q } p \geq p_\varepsilon, q > p$$

$$\Rightarrow \sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\| \leq \varepsilon$$

donc pour $q > p \geq p_\varepsilon$, $\|S_p - S_q\| \leq \varepsilon$

donc $(S_n)_n$ est de Cauchy donc CV

$\boxed{\Leftarrow}$ E e v n. et t.q. tte série AC est CV

Soit $(S_n)_n$ suite de Cauchy dans E

D'après le critère de Cauchy,

$\exists\, \varphi(0) \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq \varphi(0)$, $\|S_n - S_{\varphi(0)}\| \leq 1$

De même, $\exists\, \varphi(1) > \varphi(0) \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq \varphi(1)$, $\|S_n - S_{\varphi(1)}\| \leq \frac{1}{2}$

par récurrence, on construit $(\varphi(k))_{k\in\mathbb{N}} \nearrow\nearrow$ t.q. $\forall k$, $\forall n \geq \varphi(k)$,

$$\|S_n - S_{\varphi(k)}\| \leq \frac{1}{2^k}$$

Posons $u_k = S_{\varphi(k+1)} - S_{\varphi(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$

Par construction $\|u_k\| \leq \frac{1}{2^k}$, $\forall k \geq 0$

donc $\sum_k u_k$ est AC donc CV par hypothèse sur E.

Mais $\sum_{k=0}^{n} u_k = S_{\varphi(n+1)} - S_{\varphi(0)}$ donc $\left(S_{\varphi(n)}\right)_n$ CV.

Mais une suite de Cauchy admettant une sous-suite CV est CV

$\blacksquare$

Appl lin continues

Thm. Soit (E,p), (F,q) e.v.n et $f : E \to F$ lin.

Les ppté suivantes sont équivalentes

(i) f est C^0

(ii) f est C^0 en 0

(iii) $\exists\, k \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall x \in E$, $q(f(x)) \leq k\, p(x)$

dém.. (i) $\Rightarrow$ (ii) ✓

Supposons f C^0, alors $f^{-1}(B_q(0,1))$ est un voisinage de 0.

Donc $\exists\, r > 0$ t.q. $B_p(0,r) \subset f^{-1}(B_q(0,1))$

Posons $k = \dfrac{1}{r}$

Soient $x \in E$, $t > 0$; posons $z = r\left(p(x)+t\right)^{-1} x$

Alors $p(z) = r\left(p(x)+t\right)^{-1} p(x) < r$ et donc $z \in B_p(0,r)$

donc $f(z) \in f\left(B_p(0,r)\right) \subset B_q(0,1)$,

i.e. $q\left(f(z)\right) = q\left(r\left(p(x)+t\right)^{-1} f(x)\right) = r\left(p(x)+t\right)^{-1} q\left(f(x)\right) < 1$

donc $q\left(f(x)\right) < k\left(p(x)+t\right)$

Comme c'est vrai pour tout $t > 0$, on déduit que $q\left(f(x)\right) \leq k\, p(x)$

donc (ii) $\Rightarrow$ (iii)

(iii) $\Rightarrow$ (i) : pour tout $x, x' \in E$, $q\left(f(x) - f(x')\right) = q\left(f(x-x')\right)$
$\leq k\, p(x-x')$

donc f est bien lipschitz de rapport k, donc C^0 $\blacksquare$

Déf. (E,p), (F,q) e.v.n., $f : E \to F$ appl. lin. C^0

la meilleure constante dans (iii) ci-dessus s'appelle la **norme de f**

$$\left(\inf \{ k > 0,\ \forall x \in E,\ q(f(x)) \leq k\, p(x) \} \right) \text{ noté } \|f\|$$

Prop. Soit (E,p), (F,q) e.v.n., $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : E \to F$ lin.

les ppté suiv. sont équiv.

(i) f est C^0 et $\|f\| \leq k$

(ii) $\forall x \in E$, $q(f(x)) \leq k\, p(x)$

(iii) $\forall x \in B_p(0,1)$, $q(f(x)) \leq k$

(iv) $\forall x \in \overline{B}_p(0,1)$, $q(f(x)) \leq k$

dém. (iv) $\Rightarrow$ (ii) ✓

M q. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) si (ii) vrai, alors f est C^0 et $\|f\| \leq k$

donc (i) est vrai

Posons $I = \{ s \in \mathbb{R}_+ \text{ t q } \forall x \in E, \ q(f(x)) \leq s\, p(x) \}$.

Si f est C^0, $I \neq \emptyset$ et I minoré par 0

$\rightsquigarrow$ sa borne inf est $\|f\|$ donc $I = [\, \|f\|, +\infty [$ donc (i) $\Rightarrow$ (ii).

- (iv) $\Rightarrow$ (ii).

Soit $x \in E$, $t > 0$; posons $z = (p(x) + t)^{-1} x$

On a $p(z) = \dfrac{p(x)}{p(x)+t} < 1$ donc $z \in B_p(0,1)$

Or, si (ii) vraie alors $q(f(z)) \leq k$

Soit $q(f(x)) \leq k\, p(x) + kt$

Comme $t > 0$ est arbitraire, on déduit que $q(f(x)) \leq k\, p(x)$

i.e. (ii) vraie.

Si (ii) vraie, alors $\forall x \in \overline{B}_q(0,1)$,

$$q(f(x)) \leq k\, p(x) \leq k$$

Prop. Soit (E,p), (F,q) 2 evn

$\mathcal{L}(E,F) = \{ f : E \to F \text{ lin } C^0 \}$ est un sev, et

$f \longmapsto \|f\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$

$\mathcal{L}(E,F)$

dém.. $f = \underline{0}$ est constante donc C^0.

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in K$

- $\|f\| = 0 \Rightarrow \forall x \in E,\ q(f(x)) = 0$ donc $f(x) = 0$

  donc $f = \underline{0}$

- $\forall x \in E,\ q(\underbrace{(\lambda f)(x)}_{\lambda f(x)}) = |\lambda|\, q(f(x)) \leq |\lambda|\, \|f\|\, p(x)$

  donc λf est C^0 et $\|\lambda f\| \leq |\lambda|\, \|f\|$

- $\forall x \in E,\ q((f+g)(x)) = q(f(x) + g(x))$

$$\leq q(f(x)) + q(g(x))$$

$$\leq \|f\|\, p(x) + \|g\|\, p(x) = (\|f\| + \|g\|)\, p(x).$$

dem : $f+g$ est C^0 et $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ∎

Prop. Soit E, F, G e.v.n. $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$

Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ et $\|g \circ f\| \leq \|f\| \, \|g\|$

dém Soit p_E, p_F, p_G les normes

$$\forall x \in E, \quad p_G(g \circ f(x)) = p_G(g(f(x)))$$

$$\leq \|g\| \underbrace{p_F(f(x))}_{\leq \|f\| \, p_E(x)}$$

$$\leq \|f\| \, \|g\| \, p_E(x)$$

donc $\|g \circ f\| \leq \|f\| \, \|g\|$ $\blacksquare$

Théorème. Soit (E, p) e.v.n. et (F, q) e.v. de Banach

Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach

dém. Soit (f_n) de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$

$$\forall x \in E, \quad q\big(\underbrace{f_n(x) - f_m(x)}_{(f_n - f_m)(x)}\big) \leq \|f_n - f_m\| \, p(x)$$

donc $(f_n(x))_n$ est de Cauchy donc CV ~> on note $f(x)$ sa limite

Pour $x, y \in E$, $f_n(x+y) = f_n(x) + f_n(y)$

$$\begin{array}{ccc} f_n(x+y) & f_n(x) & f_n(y) \\ \downarrow n & \downarrow n & \downarrow n \\ f(x+y) & f(x) & f(y) \end{array}$$

donc $f_n(x) + f_n(y) \xrightarrow[n]{} f(x) + f(y)$ (car $(u,v) \mapsto u+v$ est C^0)

donc $f(x+y) = f(x) + f(y)$

De même, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Donc f est linéaire.

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$, t.q. $k, l \geq n$, $\|f_k - f_l\| < \varepsilon$

$\forall x \in E$, on a donc $q(f_k(x) - f_l(x)) \leq \varepsilon\, p(x)$

donc pour $l \to +\infty$: $q(f_k(x) - f(x)) \leq \varepsilon\, p(x)$

i.e. $q((f_k - f)(x)) \leq \varepsilon\, p(x)$

donc $f_k - f$ est C^0, et $\|f_k - f\| \leq \varepsilon$

$f_k \in \mathcal{L}(E,F) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(E,F)$

et $\bigcirc \Rightarrow (f_k)_k$ CV vers f ∎

Déf. p, q deux normes sur e v E. On dit que p, q sont équiv s'il existe $k, l > 0$ t q $k p \leq q \leq l p$

Prop. 2 normes p et q sur un e v E sont équiv $\Leftrightarrow$ elles définissent la même topo sur E

dém. $Id : (E,p) \longrightarrow (E,q)$ est l-lipschitz

$Id : (E,q) \longrightarrow (E,p)$ est (k^{-1})-lipschitz ∎

Equiv de normes

K corps $= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Lemme. K^n munis de $\| \ \|_\infty$ $\left(\xi = (x_1, \dots, x_n) \in K^n, \ \|\xi\|_\infty = \max_i |x_i| \right)$

a) Toute appl lin de K^n dans un e v n. est C^0

b) Toute appl. lin bij de K^n dans un e v.n est un homéomorphisme.

dém $(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de K^n

(E, N) e.v.n, $\varphi : K^n \to (E, N)$ appl lin.

a) $\forall \ \xi = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$, on a

$$\varphi(\xi) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$$

donc $N(\varphi(\xi)) \leq N(x_1 \varphi(e_1)) + \dots + N(x_n \varphi(e_n))$

$$= |x_1| N(\varphi(e_1)) + \dots + |x_n| N(\varphi(e_n))$$

$$\leq \|\xi\|_\infty \left(N(\varphi(e_1)) + \dots + N(\varphi(e_n))\right)$$

donc $\varphi \in \mathcal{L}(K^n, E)$ et $\|\varphi\| \leq N(\varphi(e_1)) + \dots + N(\varphi(e_n))$

b) φ bij, $S = \{\xi \in K^n \cdot \|\xi\|_\infty = 1\}$

$N \circ \varphi : K^n \to \mathbb{R}_+$ est C^0 d'après a).

Comme N est une norme, $\forall \xi \in S$, $N(\varphi(\xi)) > 0$

Mais S est compacte donc $\exists a > 0$ t.q $N(\varphi(\xi)) \geq a$ $\forall \xi \in S$

Soit $\xi \in K^n$; si $\xi \neq 0$, on pose $\zeta = \|\xi\|_\infty^{-1} \cdot \xi$.

Alors $\zeta \in S$ donc $N(\varphi(\zeta)) \geq a$

donc $N(\varphi(\xi)) \geq a \|\xi\|_\infty$

Aussi vrai pour $\xi = 0$

donc $\forall u \in E$, $N(u) = N(\varphi \circ \varphi^{-1}(u)) \geq a \|\varphi^{-1}(u)\|_\infty$

i.e. $\|\varphi^{-1}(u)\|_\infty \leq a^{-1} N(u)$.

donc φ^{-1} est C^0 et $\|\varphi^{-1}\| \leq a^{-1}$ ∎

Théorème E e v n de dim finie.

(i) Toutes les normes sur E sont équivalentes

Soit p une telle norme

(ii) Toute appl lin de (E,p) dans un e.v n est C^0

dém Soit φ $K^n \to E$ lin bij, $n = \dim(E)$

(i) Soit N et N' des normes sur E

D'après le rés. préc, φ^{-1} est un homéo de (E,N) sur $(K^n, \|\ \|_\infty)$

et φ ——————— $(K^n, \|\ \|_\infty)$ sur (E,N')

donc, $Id : (E,N) \to (E,N')$ est un homéo de (E,N) sur (E,N')

$= \varphi \circ \varphi^{-1}$

(ii) Soit ψ lin de E dans un e.v.n. F.

Par le lemme ci-dessus, φ^{-1} est un homéo de E sur K^n

et $\psi \circ \varphi$ est C^0 de K^n dans F

donc $\psi = (\psi \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ est C^0 ∎

Prop. Tout e v n de dim. finie est complet.

dém. E, $\dim E < \infty$.

Toutes les normes sur E sont équiv,

Soit φ lin bij de E sur K^n

$N : \underset{\substack{\cap \\ E}}{x} \longmapsto \|\varphi(x)\|_\infty$ Mais $(K^n, \| \|_\infty)$ est complet

et φ isométrie de (E, N) sur $(K^n, \|\cdot\|_\infty)$ donc (E, N) complet

$$\left(N(x-y) = \|\varphi(x-y)\|_\infty = \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_\infty \right)$$
$$\forall x, y \in E$$

Cor. Tout s.e.v de dim finie d'un e.v.n. est fermé

Théorème de Riesz

Soit (E, p) e.v.n. de dim infinie. Alors $\overline{B}_p(0,1)$ ne peut pas être incluse dans une réunion finie de boules ouvertes de rayon 1

i.e. $\overline{B}_p(0,1)$ ~~n'est pas compacte~~

En effet supposons qu'$\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ t.q. pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$B_p(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1)$$

Notons $F = \mathrm{Vect}((x_i)_i)$ $\quad p = \| \ \|$

Comme E est de dim ∞, $\exists\, x \in E \setminus F$

Comme F est un s e v de dim finie, $\exists\, y \in F$ t.q.

$$\|x - y\| = d(x, F).$$

Soit $x_0 = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$; on a $d(x_0, F) \leq \|x_0\| = 1$

et $\forall\, z \in F$, $\|x_0 - z\| = \left\| \dfrac{x-y}{\|x-y\|} - \dfrac{z\|x-y\|}{\|x-y\|} \right\|$

$$= \frac{1}{\|x-y\|} \underbrace{\Big\| x - \underbrace{(\underset{\in F}{y} + \underset{\in F}{z}\|x-y\|)}_{\in F} \Big\|}_{\geq d(x,F)}$$

$$\geq \frac{d(x,F)}{\|x-y\|} = 1$$

donc $d(x_0, F) \geq 1$ donc en fait $= 1$

Or $x_0 \in \overline{B}_p(0,1)$ donc $\exists\, i$ t.q. $x_0 \in B(x_i, 1)$

donc $d(x_0, x_i) < 1$ absurde car $d(x_0, \underset{\in F}{x_i}) \geq d(x_0, F) = 1$ $\blacksquare$

Ex. Soit K compact convexe d'un evn,

$f : K \to K$, C^0, tq.

$\forall (x,y) \in K^2$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x-y\|$.

Mq f a au moins un pt fixe

<u>Sol</u> Fixons $a \in K$ $\forall n \geq 1$, on pose.

$$f_n : K \longrightarrow K$$
$$x \longmapsto \underbrace{\frac{1}{n} a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)}_{\in K \text{ car } K \text{ est convexe}}$$

$$f(x) - f_n(x) = \frac{1}{n}\left(a + f(x)\right)$$

$\forall n \geq 1, \quad \forall (x,y) \in K^2,$

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \underbrace{\|f(x) - f(y)\|}_{\leq \|x-y\|}$$

donc f_n est $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$-contractante donc comme K complet (car compact)

$\exists\, x_n \in K$ t.q. $f_n(x_n) = x_n$

$(x_{\varphi(n)})_n$ CV dans K vers $x \in K$

$$\|f(x) - f_n(x_n)\| \leq \underbrace{\|f(x) - f_n(x)\|}_{\leq \frac{1}{n}(\|a\| + \|f(x)\|)} + \underbrace{\|f_n(x) - f_n(x_n)\|}_{\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x - x_n\|}$$

donc $\| f(x) - f_n(x_n) \| \leq \frac{1}{n} \left(\|a\| + \|f(x)\| \right) + \|x - x_n\|$

donc $\left(f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \right)_n$ CV vers $f(x)$

Mais $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)} \Longrightarrow f(x) = x$ donc x est un pt fixe de f $\blacksquare$

Ex. A une $\mathbb{R}$-alg normée unitaire et complète

(A alg munie de $\| \ \|$ t.q. $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \ \forall x, y$)

a) Si $x \in A$, $\|x\| < 1$, et si $\mathbb{1}$ unité de A, alors $\mathbb{1} - x$ est inv de A

a) $\sum \underset{\underset{A}{\cap}}{x^n}$ CV abs car $\sum \underbrace{\|x^n\|}_{\leq \underbrace{\|x\|}_{<1}{}^n}$ CV et A complet

Soit $y = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

$$(\mathbb{1} - x)\, y = y - xy = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = x^0 = \mathbb{1}$$

donc $(\mathbb{1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

b) M.q l'ens des inversibles de A est ouvert

b) $x_0 \in A$ inv, $\underset{\underset{A}{\cap}}{\|h\|} < \|x_0^{-1}\|^{-1} \Rightarrow \|x_0^{-1}h\| \leq \|x_0^{-1}\| \cdot \|h\| < 1$

donc $\mathbb{1} + x_0^{-1}h = \mathbb{1} - (-x_0^{-1}h)$ est inversible

donc $x_0 + h = x_0(\mathbb{1} + x_0^{-1}h)$ est inv.

$\Rightarrow B(x_0, \|x_0^{-1}\|^{-1})$ est incluse dans l'ens des inversibles

c) Soit $\varphi : A \to \mathbb{R}$ morphisme d'alg ; alors φ est C^0

c) Si $\varphi = \underline{0}$ ✓

Sinon $\exists\, x \in A$ tq $\varphi(x) \neq 0$

Alors $\varphi(x) = \varphi(\mathbb{1}\, x) = \varphi(\mathbb{1})\,\varphi(x) \Rightarrow \varphi(\mathbb{1}) = \underline{1}$

Maintenant, si $\|x\| = 1$, $|\varphi(x)| \leq \varphi(\mathbb{1})\,\|x\| = \underline{1}$

Supposons que $\exists\, x \in A$ t.q $\|x\| = 1$ et t.q. $\lambda = \varphi(x)$ vérifie $|\lambda| > 1$

Alors $\left\|\frac{1}{\lambda} x\right\| < 1$ donc $\left(\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda} x\right)$ est inversible

donc $\lambda\, \mathbb{1} - x$ est inversible, d'où g

On a $\varphi\big(\underbrace{(\lambda \mathbb{1} - x)y}_{\mathbb{1}}\big) = \mathbb{1} = \varphi(\lambda \mathbb{1} - x)\,\varphi(y)$

abonnah car $\varphi(\lambda \mathbb{1} - x) = \lambda\,\varphi(\mathbb{1}) - \varphi(x) = 0$

2) E $\mathbb{R}$-espace de Banach et $\mathcal{L}(E,E)$

Spectre de $u = \{\lambda \in \mathbb{R}$ tq $u - \lambda\, Id \in \mathcal{GL}(E)\}$

$\{v \in \mathcal{L}(E,E)$ t.q. v inv et v^{-1} $C^0\}$

M.q le $\underbrace{\text{spectre de } u}_{S}$ est compact

Ex $A = \mathcal{L}(E,E)$ alg normée complète

D'après 1) b), $\mathcal{GL}(E)$ est ouvert,

et $\varphi : \lambda \longmapsto u - \lambda Id$ est C^0,

donc S est fermé $\left(S = \varphi^{-1}\left(\underbrace{A \setminus \underbrace{\mathcal{GL}(E)}_{\text{ouvert}}}_{\text{fermé}}\right)\right)$

De plus S est borné

car $\lambda > \|u\|$, alors $\left\|\frac{1}{\lambda}u\right\| < 1$ donc $\left(Id - \frac{1}{\lambda}u\right) \in \mathcal{GL}(E)$

donc $(u - \lambda \, Id) \in GL(E)$

donc $S \subset [-\|u\|, \|u\|]$

donc S est un fermé borné de $\mathbb{R}$ donc compact $\blacksquare$