Agreg I

M LEGUIL
Martin

09/11/2020

Le corps des nombres réels

I 1 Propriétés des rationnels

$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Q}$: ensemble des rationnels

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim \quad \text{où} \quad \underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*}{\underset{\Uparrow}{(a,b)}} \sim \underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*}{\underset{\Uparrow}{(c,d)}} \quad \underline{\text{ssi}} \quad ad - bc = 0$$

Propriétés : a) $\mathbb{Q}$ est un corps commutatif pour $(+, \times)$

b) $\mathbb{Q}$ est totalement ordonné pour la relation d'ordre $\leq$ usuelle, et

i) $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}$, $a \geq b \Rightarrow a+c \geq b+c$

ii) $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}$, $c \geq 0$ et $a \geq b \Rightarrow ac \geq bc$

iii) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $n > x$

$\hookrightarrow$ $\mathbb{Q}$ est archimédien

$\mathbb{Q}$ est "dense" . $\forall a<b \in \mathbb{Q}, \exists c \in \mathbb{Q}, \quad a<c<b \quad \left(\text{p. ex } c = \frac{a+b}{2}\right)$

Cependant $\mathbb{Q}$ a quelques "défauts" ⇝ nécessité de "compléter" $\mathbb{Q}$
(nombres irrationnels  , suites de Cauchy non convergentes ..)

I.2 Suites convergentes, suites de Cauchy

Déf : • (suite bornée) Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{Q}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \le M$$

• (suite CV) Une suite $(x_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est convergente (CV) vers $a \in \mathbb{Q}$ si

$$\underset{(\varepsilon\in\mathbb{Q})}{\forall \varepsilon>0}, \ \exists \, n = n_\varepsilon > 0 \text{ t.q. } n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon .$$

Rque : a unique $\left(\text{si } b \text{ avec } \hat{m} \text{ ppté}, \ \forall \varepsilon>0, \ |a-b| \le \underbrace{|x_n - a|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|x_n - b|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon\right)$ pour n grand

⇝ $a = \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)$ = limite de la suite $(x_n)_n$

exemples. • suites stationnaires $\left((x_n)_n \text{ t.q. } x_n = x_1 \in \mathbb{Q} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\right)$

• $\forall q \in \mathbb{Q}, |q|<1, \ (x_n)_n$ avec $x_n := 1+q+\dots+q^n$ ⇝ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{1-q} \in \mathbb{Q}$

Déf La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ si $\forall \varepsilon>0, \varepsilon\in\mathbb{Q}, \exists\, n_\varepsilon>0$ entier

t.q. $\left(n>n_\varepsilon\ ,\ m\geq 0 \text{ entier}\right) \Rightarrow |x_n - x_{n+m}|<\varepsilon$

Propriétés. ① Toute suite CV est de Cauchy.

dém $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \ni (x_n)_n \to a\in\mathbb{Q} \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\, n_\varepsilon>0$ entier t.q.

$$\left.\begin{array}{l} n>n_\varepsilon \Rightarrow |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2} \\ \text{Alors } m\geq 0 \Rightarrow |x_{n+m}-a|<\frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow |x_n-x_{n+m}|<\varepsilon$$

② Toute suite de Cauchy est bornée.

dém. $(x_n)_n\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ de Cauchy $\Rightarrow \exists\, n_0\geq 0$ t.q. $m\geq n_0 \Rightarrow |x_{n_0}-x_m|<1$

$$\Rightarrow |x_m|<1+|x_{n_0}|$$

③ Si $(x_n)_n$ tend vers 0 et $(y_n)_n$ est bornée, alors $(x_ny_n)_n$ tend vers 0

dém. Soit $M\in\mathbb{Q}$ t.q. $|y_n|\leq M$ pour tout $n\geq 0$

Soit $\varepsilon>0$. $(x_n)_n\to 0 \Rightarrow \exists\, n_{\varepsilon/M}$ t.q. $n\geq n_{\varepsilon/M} \Rightarrow |x_n|<\frac{\varepsilon}{M}$ et alors $|x_ny_n|<\varepsilon$.

④ $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ de Cauchy $\Rightarrow$ $(x_n+y_n)_n$, $(x_n-y_n)_n$ et $(x_n y_n)_n$ de Cauchy.

dém.. • $|(x_n+y_n)-(x_p+y_p)| \leq \underbrace{|x_n-x_p|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|y_n-y_p|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$

si n grand et $p \geq n$

• $$|x_n y_n - x_p y_p| = |x_n(y_n-y_p) + y_p(x_n-x_p)|$$
$$\leq \underbrace{|x_n|}_{\leq M}\cdot\underbrace{|y_n-y_p|}_{<\frac{\varepsilon}{2M}} + \underbrace{|y_p|}_{\leq M}\cdot\underbrace{|x_n-x_p|}_{<\frac{\varepsilon}{2M}} < \varepsilon$$

②

pour n grand
et $p \geq n$

Si de plus $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont convergentes vers ℓ_1, ℓ_2, alors

$(x_n+y_n)_n \longrightarrow \ell_1+\ell_2$, $(x_n-y_n)_n \rightarrow \ell_1-\ell_2$, $(x_n y_n)_n \longrightarrow \ell_1\ell_2$

dém.. p.ex., $|x_n y_n - \ell_1\ell_2| = |x_n(y_n-\ell_2)+\ell_2(x_n-\ell_1)| \leq |x_n|\cdot|y_n-\ell_2| + |\ell_2|\cdot|x_n-\ell_1|$ etc

Proposition. Soit $(x_n)_n$ suite de Cauchy ne tendant pas vers 0

Alors $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $n > n_0 \Rightarrow x_n \neq 0$, et $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n > n_0}$ est de Cauchy

dém. • $(x_n)_n \not\to 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.q. $\forall n_1 > 0, \exists\ n > n_1$ t.q. $|x_n| > \varepsilon$ (∗)

$(x_n)_n$ de Cauchy $\Rightarrow \exists\ n_2 > 0$ t.q. $m \geq n_2, \forall\ n \geq m,$

(✱) $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

Prenons $n_1 > n_2$ et $n_0 > n_1$ t.q. $|x_{n_0}| > \varepsilon$ comme dans (∗)

(✱) $\Rightarrow \forall\ n \geq n_0$ on a $|x_n - x_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$ d'où $|x_n| > |x_{n_0}| - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\varepsilon}{2}$

• Soit $n > n_0$ $\left(\forall\ p \geq 0,\ |x_{n+p}| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$\forall p \geq 0$, on a $\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+p}}\right| = \left|\frac{x_{n+p} - x_n}{x_n\, x_{n+p}}\right| \leq \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \times \underbrace{|x_n - x_{n+p}|}$

aussi petit que souhaité pour n grand car $(x_n)_n$ Cauchy ∎

I.3 Construction de $\mathbb{R}$

Soit $\mathcal{C} := \{ (x_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} , (x_n)_n \text{ suite de Cauchy} \}$

I.2 $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ est un anneau commutatif

$$\Big(x = (x_n)_n \in \mathcal{C} , y = (y_n)_n \in \mathcal{C} \Rightarrow x+y := (x_n + y_n)_n \in \mathcal{C} \qquad (= y+x)$$

$$x-y := (x_n - y_n)_n \in \mathcal{C}$$

$$xy := (x_n y_n)_n \in \mathcal{C} \qquad (= yx\Big)$$

et $\underline{0} := (0)$ est neutre pour $+$. $x + \underline{0} = x , \forall x \in \mathcal{C}$

$= \underline{0} + x$

$\underline{1} := (1) \longrightarrow \times$. $x \times \underline{1} = x , \forall x \in \mathcal{C}$

$= \underline{1} \times x$

De plus, $\mathcal{C}_0 := \{ (x_n)_n \in \mathcal{C} , (x_n)_n \to 0 \} \subset \mathcal{C}$ est un idéal de $\mathcal{C}$

↳ sous groupe pour $+$
stable par multiplication par des éléments de $\mathcal{C}$

En effet si $x,y \in \mathcal{C}_0$ $\quad x \pm y \in \mathcal{C}$ et $\quad x \pm y \longrightarrow 0$

et $\forall z \in \mathcal{C}$, $\quad zx \to 0$ (car z est bornée, $x \to 0$), i.e., $zx \in \mathcal{C}_0$

On en déduit que $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}/\sim$ est un anneau commutatif

↳ où $\forall x,y \in \mathcal{C}$, $x \sim y \iff x-y \in \mathcal{C}_0$

Rappel. • $\sim$ est une relation d'équivalence :

Sym : $x \sim y \iff x-y \to 0 \iff y-x \to 0 \iff y \sim x$

réflexive : $x \sim x$ car $x - x = \underline{0}$

transitive. $x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x - z = \underbrace{(x-y)}_{\mathcal{C}_0} + \underbrace{(y-z)}_{\mathcal{C}_0} \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow x \sim z$

⤳ • $+$ et $\times$ sur $\mathcal{C}$ passent au quotient en des opérations $+$ et $\times$ sur $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$

$[x] + [y] := [x+y]$

↳ classe de $x \in \mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$

En effet, bien défini. Si $\underset{\mathcal{C}}{\underset{\cap}{x'}} \sim x$ et $\underset{\mathcal{C}}{\underset{\cap}{y'}} \sim y$

- $x' + y' = x + y + \underbrace{\underbrace{(x'-x)}_{\in \mathcal{C}_0} + \underbrace{(y'-y)}_{\in \mathcal{C}_0}}_{\in \mathcal{C}_0}$ d'où $[x'+y'] = [x+y]$ dans $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$

- $x'y' = xy + \underbrace{\underbrace{\underbrace{(x'-x)}_{\in \mathcal{C}_0}\underbrace{y'}_{\in \mathcal{C}}}_{\in \mathcal{C}_0} + \underbrace{\underbrace{x}_{\in \mathcal{C}}\underbrace{(y'-y)}_{\in \mathcal{C}_0}}_{\in \mathcal{C}_0}}_{\in \mathcal{C}_0}$ d'où $[x'y'] = [xy]$ dans $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$

De plus, $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ est un anneau commutatif unifère

($[0]$ est neutre pour $+$ et $\forall [x],[y] \in \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$, $[x+y] = [y+x]$
$[1]$ ——————— $\times$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $[xy] = [yx]$)

Proposition. $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ est un corps (commutatif)

dém. Soit $[x] \neq [\underline{0}]$ i.e $x = (x_n)_n \in \mathcal{C}$ et $(x_n)_n \not\to 0$.

D'après supra, $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n>n_0}$ est défini pour n_0 assez grand, et $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n>n_0}$ est de Cauchy.

Soit $(y_n)_n$ t.q.

$$y_n := 0 \text{ pour } n = 0, \dots, n_0 \qquad \rightsquigarrow \quad y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$$
$$y_n := \frac{1}{x_n} \text{ pour } n > n_0$$

De plus, on a $[x][y] = [xy] = [\underline{1}]$ donc tout élément non nul de $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ a un inverse, ce qui conclut la preuve du fait que $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ est un corps. ∎

Déf. Le corps $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ est appelé droite numérique ou corps des (nombres) réels.

On note $\mathbb{R} := \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$.

Injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Pour tout rationnel $x \in \mathbb{Q}$, soit $\underset{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}{\underset{\shortparallel}{\underline{x}}} \in \mathcal{C}$, tq $x_n = x$, pour tous $n \geq 0$

L'application $$\begin{aligned} \iota : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{R} = \mathcal{C}/\mathcal{C}_0 \\ x &\longmapsto [\underline{x}] \end{aligned}$$ est un plongement de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

En d'autres termes, ι est un isomorphisme de $\mathbb{Q}$ sur le sous-corps $\underbrace{\iota(\mathbb{Q})} \subset \mathbb{R}$

ensemble des classes d'équivalence de suites de Cauchy convergeant vers un nombre rationnel

Existence de nombres irrationnels

Soit $(x_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tq $x_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, $\forall n \geq 0$.

$X := (x_n)_n \in \mathcal{C}$, car $\forall m > n$,

$$(*) \quad x_m - x_n = \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{m!} \leq \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{m-n-1}}\right] < \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{(n+1)}}$$

$= \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n}$

...

De plus $[x] \in \mathcal{C}/\mathcal{C}_0 \setminus i(\mathbb{Q})$.

Sinon, on aurait $x_n \to \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*)$

Mais alors pour $n > q$, $x_n - \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{p}{q} = \frac{m}{n!}$ pour $m \in \mathbb{Z}$ (car $q \mid n!$)

Mais $(\star)$ nous dit que $|m| = \left|x_n - \frac{p}{q}\right| n! < \frac{1}{n \times n!} \times n! = \frac{1}{n}$, et donc $m = 0$

on a alors $x_n = \frac{p}{q}$, absurde, car la suite $(x_n)_n$ n'est pas stationnaire ■

I 4 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

$\mathcal{C}_+ \subset \mathcal{C}$, où $x = (x_n)_n \in \mathcal{C}_+ \iff \left[\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 0 \text{ t.q. } n > n_\varepsilon \Rightarrow x_n > -\varepsilon\right]$

idem pour $\mathcal{C}_-$

On a $\mathcal{C}_+ \cap \mathcal{C}_- = \mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_- = \mathcal{C}$

En effet, si $x = (x_n)_n \in \mathcal{C}_+ \cap \mathcal{C}_-$, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 0$ t.q. $n > n_\varepsilon$

$\Rightarrow |x_n| < \varepsilon$ et donc $x_n \longrightarrow 0$

i.e. $x \in \mathcal{C}_0$.

D'autre part, $x = (x_n)_n \notin \mathcal{C}_+ \iff \left[\exists \varepsilon > 0, \forall n > 0, \exists m > n \text{ et } x_m \leq -\varepsilon\right]$

Si n est assez grand, $p > m \Rightarrow |x_m - x_p| < \frac{\varepsilon}{2}$

et donc $x_p \leq x_m + \frac{\varepsilon}{2}$

$< -\frac{\varepsilon}{2}$

donc $x \in \mathcal{C}_-$.

Propriétés. i) $x \in \mathcal{C}_- \iff -x \in \mathcal{C}_+$

ii) $x \in \mathcal{C}_+, y \in \mathcal{C}_+ \Rightarrow x+y \in \mathcal{C}_+$

iii) $x, y \in \mathcal{C}_+ \Rightarrow xy \in \mathcal{C}_+$.

Déf. $x \in \mathbb{R}$ est dit positif / négatif si / si $x = [(x_n)_n] \in \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ avec $(x_n)_n \in \mathcal{C}_+$ / $\mathcal{C}_-$

On note $\mathbb{R}_+$ / $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des réels positifs / négatifs, $\mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ - \{0\}$, $\mathbb{R}_-^* := \mathbb{R}_- - \{0\}$

D'après les propriétés précédentes, on a donc

- $a \in \mathbb{R}_+ , b \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}_+$
  $ab \in \mathbb{R}_+$
- $a \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow -a \in \mathbb{R}_-$
- $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.

On obtient une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$ en posant $a \leq b$ ssi $b-a \in \mathbb{R}_+$
(Compatible avec l'ordre naturel de $\mathbb{Q}$) ainsi $\mathbb{R}$ est un corps ordonné
↳ i.e $x,y \in \mathbb{Q}, \; x \leq y \Rightarrow i(x) \leq i(y)$

I-5 Axiome d'Archimède

Proposition. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N}$ t.q. $p > a$.

dém. Soit $\underset{\mathcal{C}}{\underset{\cap}{x}} = (x_n)_n$ t.q. $[x] = a$.

$(x_n)_n$ est bornée donc $\exists \; M = \frac{m}{q}, \; m \in \mathbb{Z}, \; q \in \mathbb{N}^*$ t.q. $|x_n| \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

La suite $(M - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est formée de rationnels positifs donc le nombre réel qu'elle représente est positif, i.e. $M - a \in \mathbb{R}_+$, i.e. $\frac{m}{q} = M \geq a$, et donc $m+1 > a$ $\blacksquare$

Corollaire $\mathbb{R}$ a la propriété d'Archimède, i.e. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, il existe un entier p t.q. $pa > b$

dém On applique la proposition précédente à $\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$ ∎

Prop : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{Q}$ t.q. $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$

dém on prend $p \in \mathbb{N}$ t.q. $p\varepsilon > 1$ ci-dessus

et on pose $\varepsilon_1 := \frac{1}{p}$ ∎

Prop. $\forall \varepsilon, x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\exists p \in \mathbb{N}$ unique t.q.

$$(*) \quad p\varepsilon \leq x < (p+1)\varepsilon$$

dém. $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $n\varepsilon \geq |x|$ i.e. $-n\varepsilon \leq x \leq n\varepsilon$

donc l'ensemble des entiers m t.q. $m\varepsilon \leq x$ est non vide et admet un plus grand élément p qui satisfait $(*)$

Si q est un entier tq. $q\varepsilon \leq x < (q+1)\varepsilon$, alors

$q\varepsilon < (p+1)\varepsilon$ et $p\varepsilon < (q+1)\varepsilon$ $\Rightarrow \begin{cases} q < p+1 \\ p < q+1 \end{cases} \Rightarrow p-1 < q < p+1$ et $q = p$

Prop. $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x < y,\ \exists\, z \in \mathbb{Q}$ tq

$$x < z < y$$

dém Arch $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ tq. $n(y-x) > 1$

Soit $m \in \mathbb{N}$ tq. $m \times \frac{1}{n} \leq x < (m+1) \times \frac{1}{n}$

Alors $x < \underbrace{\frac{m+1}{n}}_{\in \mathbb{Q}} < y$ ∎

I 6 Suites convergentes et suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$

déf analogues de suites bornées, convergentes, de Cauchy etc.

Prop. a) $\forall (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(x_n)_n$ a au plus une limite

b) Toute suite CV (de réels) est de Cauchy

c) Toute suite de Cauchy formée de nombres rationnels CV vers le réel qu'elle représente

Théorème. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente ssi elle est de Cauchy

dém condition nécessaire claire

⇝ condition suffisante ? Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n}$$ (d'après résultat préc)

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $n > n_\varepsilon$ et $p > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_p| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\rightsquigarrow |y_n - y_p| \leq |y_n - x_n| + |x_n - x_p| + |x_p - y_p|$$
$$< |x_n - x_p| + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$$

$$m_\varepsilon := \sup\left(n_\varepsilon, \frac{1}{3\varepsilon}\right) \rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} n > m_\varepsilon \\ p > m_\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow |y_n - y_p| < \varepsilon$$

donc $(y_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$

Le nombre réel $[y]$ représenté par $y = (y_n)_n$ satisfait $|\overline{y} - y_p| < \varepsilon \ \forall p > m_\varepsilon$

et donc $\left|[y] - x_p\right| < \varepsilon + \frac{1}{p} < \underset{\downarrow \ \text{arbitraire}}{\frac{4\varepsilon}{3}}$; on conclut que $(x_n)_n$ converge vers le réel $[y] \in \mathbb{R}$.

Rque. la limite d'une suite convergente de nombres réels positifs est positive

Rappels Un groupe (ou anneau) totalement ordonné est dit complet si toute suite de Cauchy admet au moins une limite

On a construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, et on a montré

Théorème. $\mathbb{R}$ est un corps commutatif archimédien complet

I 7 La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Déf. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ où on prolonge l'ordre de $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty$$

On prolonge $+, \times$ t.q.

$$x + (+\infty) = +\infty, \quad x \neq -\infty$$
$$x + (-\infty) = -\infty, \quad x \neq +\infty$$
$$x \times (+\infty) = +\infty \text{ et } x \times (-\infty) = -\infty \quad \forall x > 0$$

Rque: $+\infty + (-\infty)$ et $0 \times (\pm\infty)$ ne sont pas définis

Déf. On dit que $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $\underset{-\infty}{+\infty}$ si $\underbrace{\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_M \in \mathbb{N} \text{ t.q.}}_{\text{pour } n > n_M}$ $\underset{x_n < M}{x_n > M}$

I.8 lim inf / lim sup

Déf. On appelle coupure toute partition de $\mathbb{R}$ en 2 ensembles A, B t.q. $\forall a \in A, b \in B$, on a $a < b$

Théorème. $\forall$ coupure (A, B) de $\mathbb{R}$, $\exists c \in \mathbb{R}$ unique t.q. $a \leq c \leq b$, pour tous $a \in A, b \in B$

Proposition.
Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\exists! L \in \overline{\mathbb{R}}$ t.q.

a) $\forall m < L, E_m = \{ n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_n > m \}$ est infini

b) $\forall M > L, E_M = \{ n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_n > M \}$ est fini

On note $\limsup\limits_{n \to +\infty} x_n := L$ ou $\limsup x_n := L$ De plus, $\limsup\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{m \geq n} x_m$

$= \inf\limits_{n} \sup\limits_{m \geq n} x_m$

dém. $A := \{ m \in \mathbb{R} \text{ t.q. } E_m \text{ infini} \}$

$B := \{ M \in \mathbb{R} \text{ t.q } E_M \text{ fini} \}$

On a $A \cup B = \mathbb{R}$ et $A \cap B = \emptyset$. On a 3 cas.

i) $B = \emptyset \iff (x_n)$ est non majorée et alors $L = +\infty$

ii) $A = \emptyset \iff (x_n)$ ——→ minorée —— $L = -\infty$

iii) Si $A, B \neq \emptyset$, (A, B) est une coupure de $\mathbb{R}$ et définit donc un réel $c \in \mathbb{R}$

Alors $L := c$ et le seul élément vérifiant a) et b) ∎

On définit de même la lim inf ; on a $\liminf_n (-x_n) = -\limsup_n x_n$

exemples : • $(x_n)_n$ avec $x_n := (-1)^n$, $\forall n \geq 0$.

$\liminf_n x_n = -1$ et $\limsup_n x_n = 1$.

• $y_n := (-a)^n$, $a > 1$ $\liminf_n y_n = -\infty$, $\limsup_n y_n = +\infty$.

Prop. $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ CV (dans $\mathbb{R}$) ssi $\liminf_n x_n = \limsup_n x_n$, et alors $\lim x_n = \liminf x_n = \limsup x_n$

dém. a) Si $(x_n) \longrightarrow x \in \mathbb{R}$.

$\forall \varepsilon > 0$, $|x_n - x| < \varepsilon$ pour n assez grand, i.e.

$\{n \in \mathbb{N}$ t.q. $|x_n - x| > \varepsilon\}$ est fini

On déduit que
$$\left.\begin{array}{l} \limsup x_n < x + \varepsilon \\ \liminf x_n > x - \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \quad l = L = x \qquad (\varepsilon \to 0)$$

Si $(x_n) \to \pm\infty$ on a déjà $\limsup = \liminf = \pm\infty$.

b) Supposons $\limsup = \liminf$. Si $= \pm\infty$ ok

Sinon $\{n \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n > \limsup + \varepsilon\}$ est fini

$\{n \in \mathbb{N}$ t.q $x_n < \liminf - \varepsilon\}$ est fini

Pour n assez grand, on a à la fois
$$\left.\begin{array}{l} x_n \leq \limsup + \varepsilon \\ x_n \geq \liminf - \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \quad |x_n - \limsup| \leq \varepsilon \qquad \square$$

Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Théorème. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$; 3 cas sont possibles.

a) $G = \{0\}$

b) $\exists\, a > 0$ unique t.q $G = a\mathbb{Z}$

c) G est dense dans $\mathbb{R}$

dém. Supposons $G \neq \{0\}$ Alors $\exists\, x_0 \in G$; on peut supposer $x_0 > 0$

Soit alors $G_+ := G \cap \mathbb{R}_+^*$ (non-vide car $x_0 \in G_+$), et posons $a := \inf G_+$

1er cas. $a > 0$. Montrons que $a \in G$. Par déf. $\exists\, (x_n)_n \in G_+^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\forall n \geq 1, \qquad a \leq x_n \leq a + \frac{1}{n}$$

Soit n assez grand t.q. $\frac{1}{n} < a \rightsquigarrow a \leq x_n < 2a$

Supposons $x_n \neq a$ Alors $\exists\, m_0$ t.q. $\forall m \geq m_0$, $\frac{1}{m} < x_n - a$

et alors $a \leq x_m \leq a + \frac{1}{m} < x_n < 2a$.

On a donc $0 \leq \underbrace{x_n - x_m}_{\rightsquigarrow \in G_+} < a$ Comme $a = \inf G_+$ on a $x_m = x_n$

$$x_n = x_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} a \in G_+$$

Dans ce cas $a\mathbb{Z} \subset G$ $\left(\begin{array}{l} a, 2a, 3a, \dots \in G \\ \text{et } -a, -2a, -3a, \dots \in G \end{array} \right\} \text{car } G \text{ groupe} \Big)$

Montrons que $G = a\mathbb{Z}$.

En effet soit $x \in G_+$ $x \geq a$

$$\Rightarrow \exists!\, n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x-(n-1)a \geq a > \underbrace{x - na}_{\rightsquigarrow \in G_+} \geq 0$$

et $x - na < a$

$\Rightarrow x = na$.

Idem si $x \in G_-$ (considérer $-x$)

$\underline{2^e \text{ Cas}}$. $a = 0$ M.q. G est dense dans $\mathbb{R}$

Soit $I =]x,y[\subset \mathbb{R}$, $x<y$, un intervalle ouvert et m.q. $G \cap I \neq \emptyset$.

$a = 0 \Rightarrow \exists\, g \in G$ t.q. $0 < g < y-x$

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, $\exists\, n>0$ t.q. $ng > x$

Soit n_0 minimal avec cette propriété

$$\rightsquigarrow \quad (n_0-1)g \leq x < n_0 g = (n_0-1)g + g$$
$$\leq x + g < y$$

donc $\underset{\substack{\cap \\ G}}{n_0 g} \in I$ ■

I g Valeurs d'adhérence, Bolzano-Weierstrass

Déf $(x_n)_n$ a $\overset{\in \mathbb{R}}{x}$ comme valeur d'adhérence si $\forall \varepsilon > 0$,

∃ infinité de $n \in \mathbb{N}$ t.q. $|x_n - x| < \varepsilon$

ex. : $((-1)^n)_n$ a 1 et -1 comme valeurs d'adhérence

Déf. : $(x_n)_n$ a $\pm\infty$ comme valeur d'adhérence si elle est non $\underset{\text{minorée}}{\text{majorée}}$

Théorème. $x \in \overline{\mathbb{R}}$ est valeur d'adhérence de (x_n) ssi ∃ $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗↗ t.q.

$$x_{\varphi(n)} \longrightarrow x$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $x_{\varphi(n)} \to x$ $\quad \underbrace{\{\varphi(n),\ n > n_0\}}_{\text{infini}}$ vérifie $|x_{\varphi(n)} - x| < \varepsilon$ pour n_0 assez grand

Supposons $x \neq \pm\infty$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \# \left]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right[\cap \{x_n\}_n = +\infty$$

⇝ on construit $(\varphi(n))_n \nearrow\nearrow$ t.q. $x_{\varphi(n)} \in \left]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right[$.

⇝ $(x_{\varphi(n)})_n \to x$ ▨

Rqu. la plus grande valeur d'adhérence est limsup / petite ⇝ liminf

Théorème : (Bolzano-Weierstrass) De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente

dém $(x_n)_n$ bornée

1ère dém. : $\limsup_n x_n < +\infty$ ⇝ on peut extraire suite CV vers $\limsup_n x_n$.

2e dém : $a \leq x_n \leq b$ $\quad \forall [u,v]$ on note $[u,v]_1 := \left[u, \frac{u+v}{2}\right]$

$[u,v]_2 := \left[\frac{u+v}{2}, v\right]$.

$I^0 := [a,b]$

$I^0 = I^0_1 \cup I^0_2 \rightsquigarrow \exists\ i=1,2$ t.q. $\# I^0_i \cap \{x_n\} = +\infty$

on pose $I^1 := I^0_i$

$I^1 = I^1_1 \cup I^1_2 \rightsquigarrow \exists\ j=1,2$ t.q. $\# I^1_j \cap \{x_n\} = +\infty \rightsquigarrow I^2 := I^1_j$

. . .

$(I^n)_{n \geqslant 0}$ suite d'int emboîtés et $\left| I^n \right| = \dfrac{a-b}{2^n} \to 0$

$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n = \underset{\underset{[a,b]}{\cap}}{\{c\}}$ et on peut construire $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow$ t.q. $x_{\varphi(n)} \to c$

∎

I 10 Topologie de $\mathbb{R}$

Déf E ensemble totalement ordonné. Un intervalle ouvert de E est $I \subset E$

$$I = \left\{ x \in E \;/\; \underbrace{(x > a_i)_{i \in I} \text{ et } (x < b_j)_{j \in J}}_{\iff \; x > a = \sup_i (a_i) \text{ et } x < b = \inf_j (b_j)} \right\}$$

indices

⇝ Pour $E = \overline{\mathbb{R}}$, 4 cas.

a) $I = \overline{\mathbb{R}}$

b) $I =]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$

c) $I =]-\infty, b[$, $b \in \mathbb{R}$

d) $I =]a, b[$, $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ $(a = b,\ I = \emptyset)$

On définit aussi les intervalles fermés à l'aide d'inégalités larges

4 cas également : $I = \overline{\mathbb{R}}$, $I = [a, +\infty[$, $I =]-\infty, b]$, $I = [a, b]$

Déf. Dans $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$) on appelle voisinage de $x \in \mathbb{R}$ (resp $\overline{\mathbb{R}}$) toute partie $V \subset \mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$) (q. $\exists$ I int ouvert, $I \subset V$ et $x \in I$

Déf. • $A \subset \mathbb{R}$ ($\overline{\mathbb{R}}$) est fermé si $\forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, $x_n \xrightarrow[n]{} \ell$, on a $\ell \in A$

• $A \subset \mathbb{R}$ est compact si de tout recouvrement $(U_n)_n$ de A par des ouverts de $\mathbb{R}$ on peut extraire un ss-recouvrement fini

Prop. A est compact ssi $\forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, $\exists (x_{\varphi(n)})_n$ ss suite CV.

Ex. : $]0, 1[$ pas compact $\left(\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 2} \right.$ n'admet aucune ss-suite convergente$)$

Thm. (Borel-Lebesgue) $A \subset \mathbb{R}$ est compact ssi A est fermé et borné

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $(x_n)_n \to l$ toute sous-suite CV vers l donc $l \in A$

Si non borné on peut construire une sous-suite qui ne CV pas

$\boxed{\Leftarrow}$ Si fermé et borné. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$

↳ Bolzano-Weierstrass. $\exists \left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ ss suite CV vers $l \in \mathbb{R}$

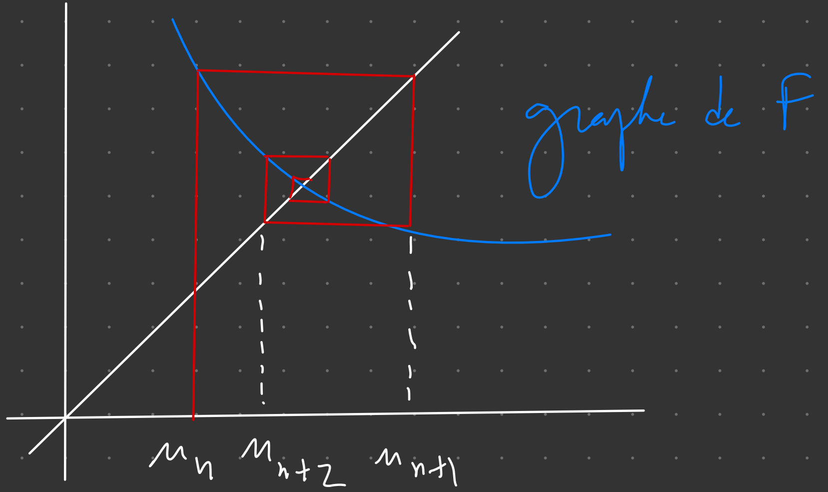
fermé. $l \in A$ ▨

I 1 Suites récurrentes

$(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *récurrente* si $\exists\, u_0 \in \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq

$$u_{n+1} = F(u_n), \quad \forall\, n \geq 0$$

$$\rightsquigarrow \quad u_n = F^n(u_0)$$



Prop. Si F est continue et $(u_n)_n \longrightarrow \ell$, alors

$$F(\ell) = \ell$$

dém.

$$\begin{tikzcd} u_{n+1} \arrow[d] & = & F(u_n) \arrow[d] \\ \ell & & \ell \end{tikzcd}$$

$\to \ell$ car F est continue ∎

Le comportement de $(u_n)_n$ dépend de u_0.

exemple. (Fibonacci) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$

① On peut poser $u_n := \frac{x_{n+1}}{x_n}$ ⇝ $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$

d'où F : $z \mapsto 1 + \frac{1}{z}$

Points fixes de F : $1 + \frac{1}{z} = z \iff z^2 - z - 1 = 0$

et $z \neq 0$

$\leadsto z = \phi$ ou $-\frac{1}{\phi}$ où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$-\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Prop. ① $(u_{2k})_k$ est ↗

② $(u_{2k+1})_k$ est ↘

③ Ces suites sont adjacentes donc convergent

Dém. En effet $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ et $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$

$$u_{n+1} - \phi = \frac{\phi - u_n}{u_n \phi}$$

$u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} - \phi$ et $u_n - \phi$ de signe opposé.

$u_0 < \phi \rightsquigarrow \forall k \geq 1,$

$$u_{2k} < \phi < u_{2k+1}$$

et $u_{n+2} - \phi = \dfrac{u_n - \phi}{\phi^2 (u_n + 1)}$

Or $u_n > 0$, $\phi > 1$, $u_0 < \phi$ et $u_1 > \phi$

donc (par réc.) $0 < \phi - u_{2k+2} < \frac{1}{\phi^2}(\phi - u_{2k}) < \frac{1}{\phi^{2k+2}}(\phi - u_0)$

(impairs) $0 < u_{2k+3} - \phi < \frac{1}{\phi^2}(u_{2k+1} - \phi) < \frac{1}{\phi^{2k+2}}(u_1 - \phi)$

De plus $\phi - u_{2k} = O(\phi^{-2k})$

$-\phi + u_{2k+1} = O(\phi^{-2k})$ ▨

② Autre approche. $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

Si $X_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$

alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = A X_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d'où $X_n = A^n X_0$

A est sym. on peut diagonaliser A et calculer A^n.

$$\det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x(x-1)-1 = \underline{x^2-x-1}$$

ϕ et $-\frac{1}{\phi}$

$$A = P \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\phi} \end{pmatrix} P^{-1}$$

↳ matrice de passage

↳ D

d'où $X_n = \underbrace{A^n}_{PD^hP^{-1}} X_0$

d'où $Y_n = P^{-1} X_n = D^h P^{-1} X_0$
$= D^h Y_0$

et alors $X_n = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\phi} \end{pmatrix}^n X_0$

$$= \begin{pmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n \end{pmatrix} Y_0$$

d'où $X_n = P Y_n = \underline{P} \begin{pmatrix} \boxed{\phi^n} & 0 \\ 0 & \underbrace{\boxed{\left(-\frac{1}{\phi}\right)^n}}_{= O\left(\phi^{-n}\right)} \end{pmatrix} \underline{P^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercices

Ex 1. Soit $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ 2 suites de nombres réels convergeant respectivement vers a, b. Montrer que la suite $(c_n)_n$, avec

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k}$$

tend vers ab.

Ex. 2. Soit $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.q. $(x_{2n})_n$, $(x_{3n})_n$ et $(x_{2n+1})_n$ soient convergentes. Montrer que $(x_n)_n$ est convergente

Ex 3 Soit $(v_n)_n$ suite réelle convergeant vers l.

Montrer que $(w_n)_n$ est convergente, et $\lim_n w_n = l$, où

$$w_n = \frac{1}{n}\left(v_1 + v_2 + \dots + v_n\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ex. 4. Étudier les suites $(u_n)_n$ définies par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec.

a) $u_0 \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{a(1+a^2)}{1+x^2} \quad$ ($a > 0$ fixé)

b) $u_0 > 0$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{2-\sqrt{x}} \quad$ (u_0 t.q u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$)

c) $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$

d) $f(x) = a \sin x + b, \qquad |a| < 1$

(montrer que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy)

Ex 5. Soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ et $(y_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ t.q. $\lim\limits_n y_n = x$ avec $y_n = \frac{p_n}{q_n}$, $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\lim_n p_n = \lim_n q_n = +\infty$$

Ex.6. $\forall x \in \mathbb{R}$ on note $[x]$ la partie entière de x, et si $x \notin \mathbb{Z}$, on pose $f(x) = \frac{1}{x - [x]}$

Pour $n \geqslant 0$ on note $f^n = \underbrace{f \circ \cdot \circ f}_{n \text{ fois}}$ $\quad (f^0 = \mathrm{id})$

a) Si $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $x = \frac{p}{q}$, $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*)$

Montrons que $f(x)$ est représentable par une fraction de dénominateur inférieur à q.

On déduit qu'il existe $n \geqslant 0$ t.q. $f^n(x) \in \mathbb{Z}$, et que

$$(*) \quad X = y_0 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cdot \, + \cfrac{1}{y_n}}} \quad \text{où } y_k = [f^k(x)].$$

$$\left(= [y_0, y_1, \dots, y_n]\right)$$

5) $x \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ étant donné, montrer qu'il existe une seule suite finie d'entiers $(y_0, \dots, y_n)$ vérifiant $(\ast)$

avec $y_k > 0$ pour $k > 0$

Ex 7. Mêmes notations qu'en 6.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, on $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, où

$$x_0 = x \quad , \qquad x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{x_n - [x_n]}$$

Il soit $y_n = [x_n] = x_n - \dfrac{1}{x_{n+1}}$

a) On définit 2 suites d'entiers $(P_n)_n$, $(Q_n)_n$, avec

$$P_0 = y_0, \quad Q_0 = 1, \quad P_1 = y_0 y_1 + 1, \quad Q_1 = y_1,$$

$$P_{n+1} = P_n y_{n+1} + P_{n-1}, \quad Q_{n+1} = Q_n y_{n+1} + Q_{n-1}$$

Montrer que $\forall n \geq 2$,

$$x = \frac{P_{n-1} x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} x_n + Q_{n-2}}$$

b) $\xi_n := [y_0, \ldots, y_n] \in \mathbb{Q}$ Montrer que

$$\xi_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} y_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} y_n + Q_{n-2}}$$

c) M.q. $(Q_n)_n$ est strictement croissante pour $n > 1$

et que $\lim_n Q_n = +\infty$

M.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1} = (-1)^n$

En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\xi_{2p} < x < \xi_{2p+1}$.

M.q. $(\xi_{2p})_p \nearrow$ et $(\xi_{2p+1})_p \searrow$

d) M.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n^2}$ Qu'en déduit-on ?

M.q. $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, t.q. $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right|$ on $q \geq Q_n$.

Interprétation ?

Ex 8 Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$, f strictement croissante

Mq l'équation $f \circ f(x) = x$ équivaut à $f(x) = x$

(discuter $e^{ae^{ax}} = x$, $a > 0$)

Ex 9. Étudier $(u_n)_n$ où $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + n + 1$

(remarquer que $(u_n = an^3 + bn^2)_n$ est solution, $a, b \in \mathbb{R}$)

Ex 10. $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$, montrer que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \dots + x_n\right)$$

Ex 11. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$. Montrer que

$$\lim_n \sin(n\alpha) \text{ existe} \iff \lim_n \cos(n\alpha) \text{ existe}$$

En déduire que aucune de ces 2 suites ne converge.

Ex 12. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lambda$

a) M.q $\lim\limits_n \frac{u_n}{n} = \lambda$

b) M q. $\lim\limits_n \frac{u_1 + \cdot + u_n}{n^2} = \frac{\lambda}{2}$.

c) Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t q. $\lim\limits_n (a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}) = \lambda$

M q. $\lim\limits_n a_n/n^2 = \lambda/2$

Ex. 13. Soit $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$x_1 = 1, \qquad x_n = \sqrt{n + x_{n-1}}, \quad \forall n \geq 2.$$

Donner un équivalent de $(x_n)_n$ quand $n \to +\infty$.

Calculer les 2 premiers termes du développement asymptotique de $(x_n)_n$ quand $n \to +\infty$

Ex. 14. Soit G un groupe archimédien. $\forall u \in G$ avec $u > 0$,

a) M.q. il existe un homomorphisme croissant unique h de G dans $\mathbb{R}$ t.q. $h(u) = 1$

b) M.q. cet homomorphisme est strictement croissant, donc injectif

c) En prenant $G = \mathbb{R}$, montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et satisfait

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R},$$

alors $f(x) = x\, f(1)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$